

기본 참조 01 · 심화 01에서 사용하는 개념

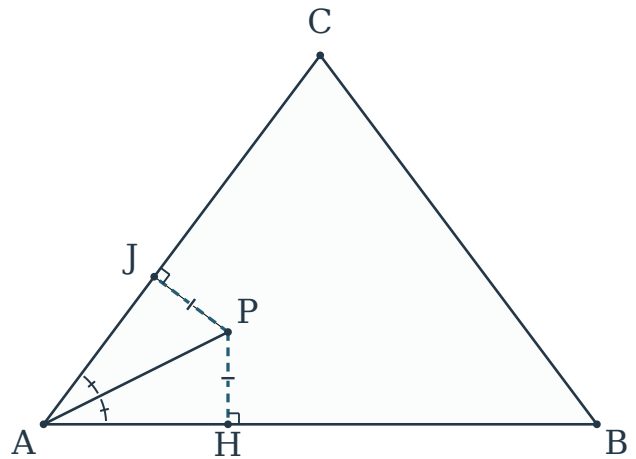
거리와 넓이를 문제에서 어떻게 사용할까?

심화 01에서 사용하는 개념을 모았다. 개념의 자세한 설명과 증명은 각 항목의 ‘보유 개념서에서 찾기’에 적힌 이름으로 찾아본다.

B22-01 각이 같다는 조건을 언제 거리로 바꿀까?

점 P가 $\angle A$ 의 이등분선 위에 있고, P에서 그 각의 두 변을 포함하는 직선에 내린 수선의 발을 H, J라 하자.

$$\left. \begin{array}{l} \angle HAP = \angle PAJ \\ \overline{PH} \perp \overline{AH}, \quad \overline{PJ} \perp \overline{AJ} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{PH} = \overline{PJ}$$



각 A의 이등분선 위의 P에서 두 변에 내린 수선

확인할 것	문제에서 쓰는 형태
점과 직선 사이의 거리	그 점에서 직선에 내린 수선의 길이
어느 두 거리가 같은가	이등분되는 각의 두 변까지의 거리
넓이와 어떻게 연결하는가	두 변 위의 선분을 밑변으로 잡을 때, 같은 거리를 높이로 사용

수선을 긋는 이유: 각의 이등분선과 넓이가 함께 나오면, 같은 높이를 가진 삼각형을 만들 수 있는지 살펴본다.

주의

이 조건만으로 P에서 삼각형의 나머지 한 변까지의 거리나, 각 꼭짓점까지의 길이가 같다고 할 수는 없다. 그림에서 변 BC는 세 번째 변이다. P에서 변 BC까지의 거리가 $\overline{PH}$, $\overline{PJ}$ 와 같다고 할 수는 없다.

보유 개념서에서 찾기 점과 직선 사이의 거리 / 각의 이등분선의 성질 / 직각삼각형의 합동 조건

B22-02 내심을 알면 둘레와 넓이를 어떻게 연결할까?

삼각형의 두 내각의 이등분선의 교점은 내심이다. 내심 I에서 세 변에 내린 수선의 발을 H, J, K라 하면

$$\overline{IH} = \overline{IJ} = \overline{IK} = r$$

여기서 r 은 내접원의 반지름의 길이이다. I와 세 꼭짓점을 연결하여 만든 세 삼각형은, 원래 삼각형의 각 변을 밑변으로 잡을 때 높이가 모두 r 이다.

찾으려는 것	바로 사용할 형태
전체 넓이	$\triangle ABC$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) \times r$
내접원의 반지름의 길이	$r = \frac{2 \times \triangle ABC \text{의 넓이}}{\triangle ABC \text{의 둘레의 길이}}$
변 AB를 밑변으로 잡은 부분의 넓이	$\triangle AIB$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \overline{AB} \times r$
부분의 넓이에서 변의 길이	$\overline{AB} = \frac{2 \times \triangle AIB \text{의 넓이}}{r}$

대응 확인: 밑변이 변 AB이면 높이는 I에서 직선 AB에 내린 수선의 길이이다. $\overline{IA}$ 나 $\overline{IB}$ 를 높이 자리에 넣지 않는다.

보유 개념서에서 찾기 삼각형의 내심 / 내접원 / 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

B22-03 높이가 같으면 밑변의 어떤 정보를 쓸 수 있을까?

두 삼각형의 밑변 길이를 각각 a , b , 그 밑변에 대한 같은 높이를 h 라 하자. a , b , h 는 모두 양수이다.

알고 있는 정보	넓이로 옮긴 식
밑변 길이의 비 $a : b$	$\frac{1}{2}ah : \frac{1}{2}bh = a : b$
밑변 길이의 합 $a + b$	$\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a + b)h$
밑변 길이의 차 $a - b$, 단 $a \geq b$	$\frac{1}{2}ah - \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a - b)h$

같은 높이를 확인하는 두 가지 경우

- 같은 꼭짓점에서, 같은 직선 위의 두 밑변을 바라본다.
- 꼭짓점이 같고 밑변들이 다른 직선 위에 있어도, 각의 이등분선·내심의 성질 등으로 두 수선의 길이가 같음을 확인한다.

주의

밑변 길이의 비만 주어졌는데 높이의 관계를 확인하지 않았다면, 넓이의 비를 같은 비로 정할 수 없다.

보유 개념서에서 찾기 삼각형의 넓이 / 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비

B22-04 중점은 어떤 넓이를 같게 만들까?

M이 변 BC의 중점이면

$$\overline{BM} = \overline{MC}$$

같은 꼭짓점에서 두 밑변인 선분 BM, 선분 MC를 바라보면 높이가 같으므로 다음과 같이 사용할 수 있다. P는 직선 BC 위에 있지 않은 점이다.

공통 꼭짓점	같은 넓이
A	$\triangle ABM$ 의 넓이 = $\triangle ACM$ 의 넓이
P	$\triangle PBM$ 의 넓이 = $\triangle PCM$ 의 넓이

주의

두 행은 서로 다른 비교이다. A에서 직선 BC까지의 높이와 P에서 직선 BC까지의 높이가 같다는 뜻은 아니다. 중점이라는 조건만으로 각이 이등분되거나 선분 AM이 직선 BC에 수직이라고 할 수도 없다.

중점 대신 D가 선분 BC를 $m : n$ 으로 나누는 경우에는, $m, n > 0$ 일 때

$$\overline{BD} : \overline{DC} = m : n \Rightarrow \triangle ABD \text{의 넓이} : \triangle ACD \text{의 넓이} = m : n$$

따라서

$$\triangle ABD \text{의 넓이} = \triangle ABC \text{의 넓이} \times \frac{m}{m+n}$$

보유 개념서에서 찾기 선분의 중점 / 삼각형의 넓이의 비