

심화 01 · 각의 이등분선과 넓이

각의 이등분선에서 넓이까지 어떻게 연결할까?

이번에 연결할 생각

각의 이등분선에서 같은 거리를 찾고, 그 거리를 높이로 사용한다. 중점으로 얻은 같은 넓이와 연결하여 작은 삼각형의 넓이를 구한다.

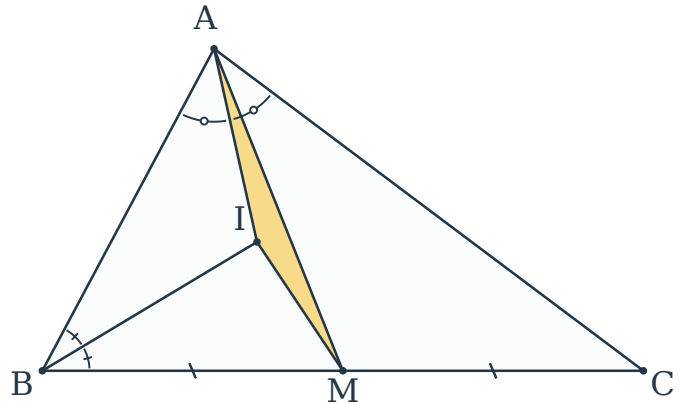
대표 문제

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 와 $\angle B$ 의 이등분선의 교점을 I ①라 하고, 변 BC의 중점을 M ②이라 하자. 점 I는 $\triangle ABM$ 의 내부 ③에 있다.

$\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는 70 cm ④, 넓이는 210 cm^2 ⑤이고,

$$\overline{AC} - \overline{AB} = 8\text{ cm} \text{ ⑥}$$

이다. $\triangle AIM$ 의 넓이를 구하시오.



두 각의 이등분선의 교점 I, 중점 M, 구할 $\triangle AIM$

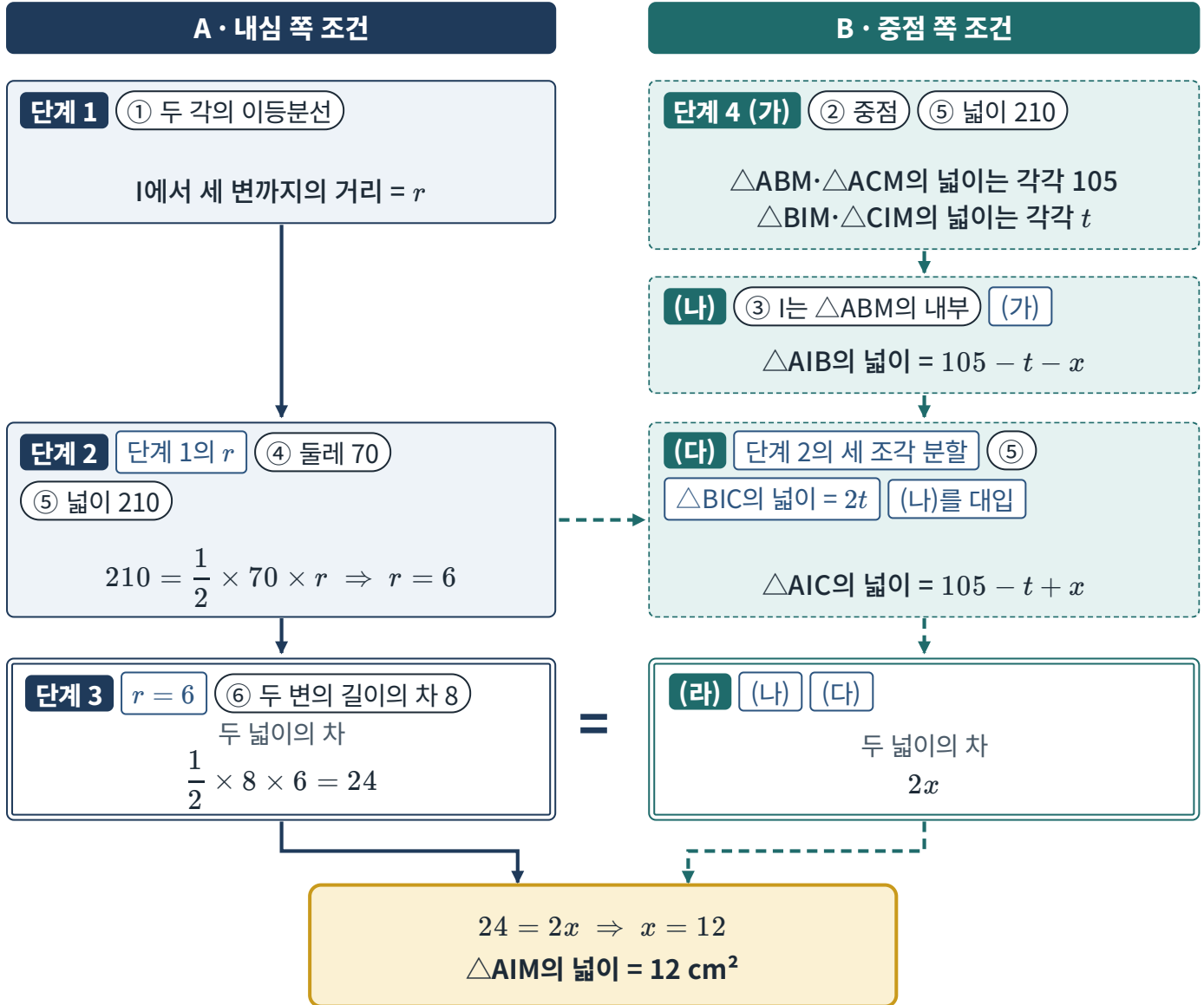
조건과 목표를 나누면?

표지	주어진 조건	식·그림에서 확인할 것	쓰이는 단계
①	두 각의 이등분선의 교점 I	$\angle BAI = \angle IAC, \angle ABI = \angle IBC$	단계 1
②	M은 변 BC의 중점	$\overline{BM} = \overline{MC}$	단계 4
③	I는 $\triangle ABM$ 의 내부	$\triangle ABM$ 의 넓이 = $\triangle AIB$ 의 넓이 + $\triangle BIM$ 의 넓이 + $\triangle AIM$ 의 넓이	단계 4
④	둘레의 길이 70 cm	$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 70\text{ cm}$	단계 2
⑤	전체 넓이 210 cm^2	$\triangle AIB$ 의 넓이 + $\triangle BIC$ 의 넓이 + $\triangle CIA$ 의 넓이 = 210 cm^2	단계 2 4
⑥	두 변의 길이의 차 8 cm	$\overline{AC} - \overline{AB} = 8\text{ cm}$	단계 3
목표	$\triangle AIM$ 의 넓이	세 변의 길이를 각각 구할 필요가 있는지 먼저 살펴봄 (→ 단계 2·3에서 확인)	두 흐름이 만나는 곳

단계 흐름 A · 내심 쪽 조건 단계 흐름 B · 중점 쪽 조건 두 흐름이 만나는 모습 → 2쪽 지도

조건들이 연결되는 길

r I에서 세 변까지의 같은 거리 (단계 1에서 확인)	x 구하려는 $\triangle AIM$ 의 넓이
t ②에 의해 넓이가 같아지는 $\triangle BIM$, $\triangle CIM$ 각각의 넓이	두 넓이의 차 $\triangle AIC$ 의 넓이 - $\triangle AIB$ 의 넓이



① 주어진 조건 앞 결과 앞 단계에서 구한 것 두 흐름이 만나는 값

점선 화살표(A→B): 단계 2의 세 조각 분할을 (다)에서 다시 사용

내심 쪽 조건으로 구한 넓이 차와, 중점 쪽 조건으로 표현한 넓이 차이가 같은 값이어서 두 흐름이 연결된다.

- 단계 1** 각의 이등분선이 있는데, 왜 수선을 그을까?

단계 2 세 변의 길이를 모르는데, 높이 r 을 구할 수 있을까?

단계 3 두 변의 길이의 차는 어디에 쓸까?

단계 4 중점 M은 작은 $\triangle AIM$ 과 어떻게 연결될까?

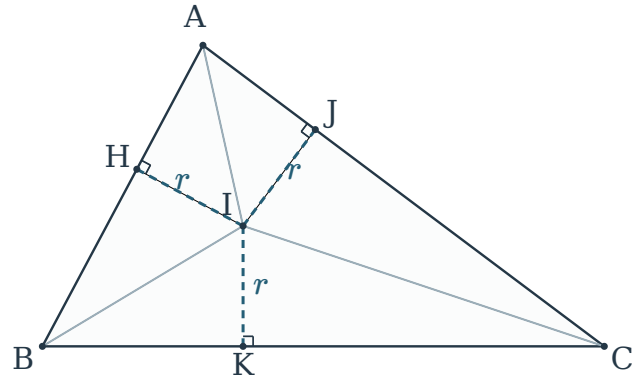
단계 1 각의 이등분선이 있는데, 왜 수선을 그을까?

쓰는 것 ① 넓이라는 목표 → 얻는 것 세 변까지의 같은 거리 r

떠올릴 것 각의 이등분선에서는 각의 같음과 두 변까지의 거리의 같음을 떠올릴 수 있다.

문제에 있는 것 이 문제에는 둘레와 넓이가 주어졌다. 변의 길이를 밑변으로 사용하려면 그 변에 대한 높이가 필요하다.

그래서 I에서 변 AB, 변 AC, 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, J, K라 하자.



I에서 세 변에 내린 수선과 같은 높이 r

사용한 조건	얻는 관계
① 중 $\angle A$ 의 이등분선	$\overline{IH} = \overline{IJ}$
① 중 $\angle B$ 의 이등분선	$\overline{IH} = \overline{IK}$
두 관계를 함께 사용	$\overline{IH} = \overline{IJ} = \overline{IK} = r$

이처럼 I는 $\triangle ABC$ 의 **내심**이고, 세 변까지의 같은 거리를 각각 높이로 사용할 수 있다. 앞으로 길이는 cm, 넓이는 cm^2 단위의 수치로 계산한다.

결과 $\overline{IH} = \overline{IJ} = \overline{IK} = r$ → 단계 2에서 공통 높이로 사용

관련 개념 · 각의 이등분선의 성질 (기본 B22-01 · 기본편 1쪽) / 삼각형의 내심 (기본 B22-02 · 기본편 2쪽)

단계 2 세 변의 길이를 모르는데, 높이 r 을 구할 수 있을까?

쓰는 것 단계 1의 같은 높이 r ④ ⑤ → 얻는 것 $r = 6$

I와 C를 연결하면 $\triangle ABC$ 가 $\triangle AIB$, $\triangle BIC$, $\triangle CIA$ 로 나뉜다. 세 삼각형의 밑변을 각각 변 AB, 변 BC, 변 CA로 잡으면 높이가 모두 r 이다.

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{의 넓이} &= \frac{1}{2} \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \overline{BC} \times r + \frac{1}{2} \overline{CA} \times r \\ &= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) \times r \end{aligned}$$

각 변의 길이는 몰라도, 세 변의 합은 ④에서 알고 있다. ⑤의 넓이와 함께 쓰면

$$210 = \frac{1}{2} \times 70 \times r \Rightarrow r = 6$$

결과 $r = 6$ · 전체를 세 조각으로 나눈 관계는 단계 4에서 다시 사용한다. → 단계 3에서 높이로 사용

관련 개념 · 내심에서 나눈 삼각형의 넓이 (기본 B22-02 · 기본편 2쪽)

단계 3 두 변의 길이의 차는 어디에 쓸까?

쓰는 것 [단계 2의 높이 6] ⑥ → 얻는 것 [두 넓이의 차 24]

$\triangle AIC$ 와 $\triangle AIB$ 는 밑변을 각각 변 AC , 변 AB 로 잡을 때 높이가 모두 6이다. 따라서 두 넓이의 차에는 두 밑변 길이의 차를 그대로 사용할 수 있다.

$$\begin{aligned}\triangle AIC \text{의 넓이} - \triangle AIB \text{의 넓이} &= \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) \times 6 \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24\end{aligned}$$

⑥은 두 변을 각각 구하라는 조건이 아니다. **같은 높이를 가진 두 삼각형의 넓이 차를 구하는 데 쓸 수 있다.**

결과 $\triangle AIC$ 의 넓이 - $\triangle AIB$ 의 넓이 = 24→ 단계 4에서 $2x$ 와 연결

관련 개념 · **높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 차** (기본 B22-03 · 기본편 2쪽)

단계 4 중점 M은 작은 $\triangle AIM$ 과 어떻게 연결될까?쓰는 것 ② ③ ⑤ [단계 2의 세 조각 분할] [단계 3의 넓이 차] → 얻는 것 x **(가)** 중점에서 같은 넓이 두 쌍을 찾는다

②에서 $\overline{BM} = \overline{MC}$ 이다. 같은 직선 위에 있는 두 선분을 밑변으로 잡으면 다음 두 쌍에서 각각 높이가 같다.

같은 꼭짓점	비교하는 두 삼각형	얻는 관계
A	$\triangle ABM, \triangle ACM$	⑤를 함께 쓰면 각각의 넓이는 $210 \div 2 = 105$
I	$\triangle BIM, \triangle CIM$	각각의 넓이는 t . 따라서 $\triangle BIC$ 의 넓이는 $2t$

주의

두 쌍의 높이가 모두 같은 것은 아니다. A에서 직선 BC까지의 높이는 첫째 쌍에서, I에서 직선 BC까지의 높이는 둘째 쌍에서 공통이다.

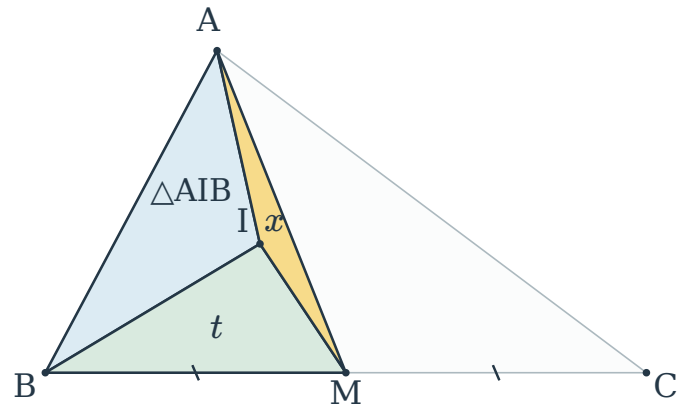
(나)~(라)는 다음 쪽에서 이어진다.

단계 4 중점 M은 작은 $\triangle AIM$ 과 어떻게 연결될까? (이어서)

(나) ③을 사용하여 $\triangle AIB$ 의 넓이를 x 로 나타낸다

I가 $\triangle ABM$ 의 내부에 있으므로 위 그림에서

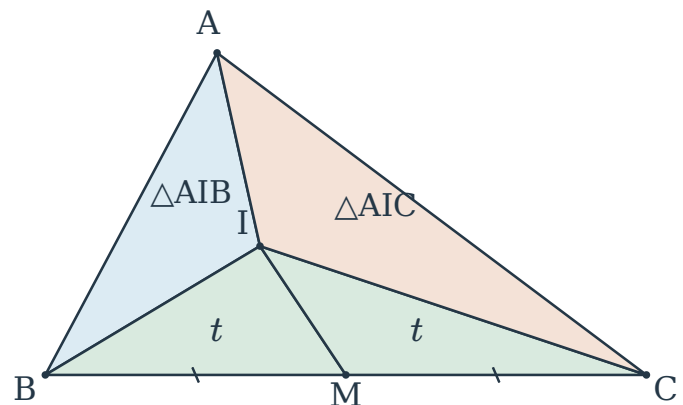
$$\begin{aligned} \triangle AIB \text{의 넓이} + t + x &= 105 \\ \Rightarrow \triangle AIB \text{의 넓이} &= 105 - t - x \end{aligned}$$



위: $\triangle ABM$ 을 세 부분으로 나누기

(다) 단계 2의 세 조각 분할을 다시 사용한다

아래 그림에서는 선분 AM을 지우고 전체를 본다.
 $\triangle BIM$ 과 $\triangle CIM$ 을 합치면 $\triangle BIC$ 이고, 그 넓이는 $2t$ 이다.



아래: $\triangle ABC$ 를 겹치지 않는 네 부분으로 나누기

$$\triangle AIB \text{의 넓이} + \underbrace{2t}_{\triangle BIC \text{의 넓이}} + \triangle AIC \text{의 넓이} = 210$$

(나)에서 얻은 $\triangle AIB$ 의 넓이를 대입하면

$$\begin{aligned} \triangle AIC \text{의 넓이} &= 210 - (105 - t - x) - 2t \\ &= 105 - t + x \end{aligned}$$

(라) 두 넓이의 차에서 두 흐름을 합친다

$$\triangle AIC \text{의 넓이} - \triangle AIB \text{의 넓이} = (105 - t + x) - (105 - t - x)$$
$$= 2x$$

흐름 A의 단계 3에서 구한 넓이 차는 24이고, 흐름 B에서 나타낸 같은 넓이 차는 $2x$ 이다.

$$24 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

결과 $x = 12$. 두 흐름이 같은 넓이 차에서 만나 목표 넓이를 구했다.

정답: 12 cm^2

관련 개념 · 중점과 같은 넓이 (기본 B22-04 · 기본편 3쪽)

5 비슷한 조건이면 같은 풀이를 써도 될까?

조건이 달라지면	그대로 쓸 수 있는 관계	새로 확인할 점	대표 문제 단계
P가 $\angle A$ 의 이등분선 위에 있다는 조건만 있음	P에서 직선 AB, 직선 AC까지의 거리는 같음	같은 두 거리를 r 이라 해도 직선 BC까지의 거리가 r 인지는 알 수 없다. 따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times (\text{둘레의 길이}) \times r$ 로 계산할 근거가 없다.	1·2
I가 내심임	I에서 세 변까지의 거리가 모두 같음	꼭짓점이 I이고 밑변이 직선 AB·BC·CA 중 하나 위에 있으면 높이가 r 이다. 예: $\triangle AIB$ 의 밑변인 변 AB, $\triangle BIM$ 의 밑변인 선분 BM. I에서 꼭짓점까지의 길이가 같은 것은 아니다.	1·2
M이 변 BC의 중점임	$\triangle ABM$ 과 $\triangle ACM$ 의 넓이, $\triangle BIM$ 과 $\triangle CIM$ 의 넓이가 각각 같음	각 쌍에서 같은 꼭짓점과 같은 직선 위의 밑변을 사용했는지 확인한다.	4
D가 선분 BC를 2 : 1로 나눔	같은 꼭짓점을 가진 두 삼각형의 넓이의 비도 2 : 1	두 넓이를 같다고 놓을 수 없다. 대표 문제의 ‘넓이 차 $= 2x$ ’를 그대로 사용하지 않는다.	4

확인 문제

01 어느 거리까지 같다고 할 수 있을까?

단계 1 · 비교표 1행

$\triangle ABC$ 의 내부의 점 P가 $\angle A$ 의 이등분선 위에 있다. P에서 직선 AB, 직선 AC, 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, J, K라 하자. 주어진 조건만으로 반드시 성립하는 것은?

- $$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \overline{PH} = \overline{PJ} & \textcircled{2} \overline{PH} = \overline{PK} \\ \textcircled{3} \overline{PJ} = \overline{PK} & \textcircled{4} \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} \end{array}$$

02 둘레와 넓이를 함께 쓰기

단계 2

어떤 삼각형의 둘레의 길이는 60 cm, 넓이는 150 cm^2 이다. 이 삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 구하시오.

03 각각의 넓이가 꼭 필요할까?

단계 3

1가 $\triangle ABC$ 의 내심이고, 내접원의 반지름의 길이는 4 cm이다. $\overline{AB} = 13$ cm, $\overline{AC} = 15$ cm일 때, $\triangle AIC$ 의 넓이에서 $\triangle AIB$ 의 넓이를 뺀 값을 구하시오.

04 내심이 아니어도 중점은 사용할 수 있을까?

단계 4 · 내심 조건 없이

M은 $\triangle ABC$ 의 변 BC의 중점이고, P는 $\triangle ABM$ 의 내부의 점이다. $\triangle APB$ 의 넓이가 24 cm^2 , $\triangle APC$ 의 넓이가 36 cm^2 일 때, $\triangle APM$ 의 넓이를 구하시오.

05 중점이 아닌 점으로 바뀌면?

비교표 4행

$\triangle ABC$ 의 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$ 이다. P가 $\triangle ABD$ 의 내부에 있을 때, 옳지 않은 것은?

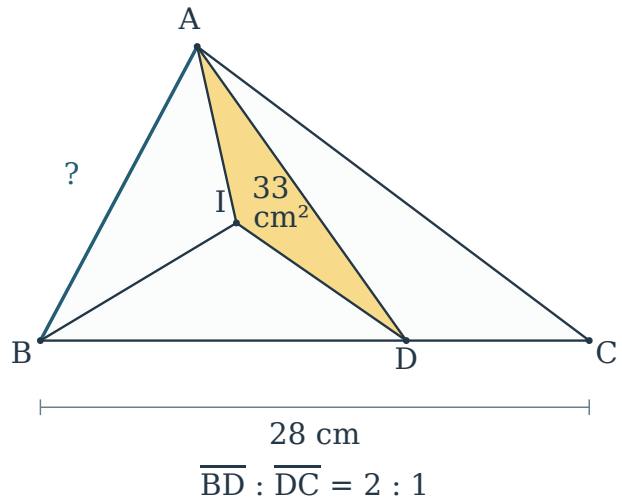
- ① $\triangle ABD$ 의 넓이 : $\triangle ACD$ 의 넓이 = 2 : 1 ② $\triangle PBD$ 의 넓이 : $\triangle PCD$ 의 넓이 = 2 : 1
 ③ $\triangle PBD$ 의 넓이 : $\triangle ABD$ 의 넓이 = 2 : 1 ④ $\overline{BD} = \frac{2}{3} \overline{BC}$

06 작은 넓이에서 변의 길이로 거꾸로 연결하기

단계 1·2 + B22-04 · 목표에서 거꾸로

$\triangle ABC$ 의 내심을 I라 하고, 변 BC 위에 $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$ 인 점 D를 잡았다. I는 $\triangle ABD$ 의 내부에 있다.

$\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는 70 cm, 넓이는 210 cm^2 이다. $\overline{BC} = 28 \text{ cm}$ 이고, $\triangle AID$ 의 넓이는 33 cm^2 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하시오.



확인 문제 정답·해설

문항	01	02	03	04	05	06
정답	①	5 cm	4 cm ²	6 cm ²	③	17 cm

01 ①

P는 $\angle A$ 의 이등분선 위에 있고, 선분 PH와 선분 PJ는 그 각의 두 변에 내린 수선이다. 따라서 $\overline{PH} = \overline{PJ}$ 이다. ②·③은 직선 BC까지의 거리가 같다는 조건이 추가로 필요하다. ④는 꼭짓점까지의 거리이며, 각의 이등분선에서 보장되는 두 변까지의 거리와 다르다.

02 5 cm

내심에서 세 변까지의 거리는 내접원의 반지름의 길이 r 과 같다.

$$150 = \frac{1}{2} \times 60 \times r \Rightarrow r = 5$$

03 4 cm²

두 삼각형의 높이가 모두 4 cm이므로 밑변 길이의 차를 사용한다.

$$\frac{1}{2} \times (15 - 13) \times 4 = 4 \text{ cm}^2$$

04 6 cm²

M이 중점이므로 $\triangle ABM$ 과 $\triangle ACM$ 의 넓이가 같고, $\triangle PBM$ 과 $\triangle PCM$ 의 넓이도 같다. $\triangle ABM$ 의 넓이를 L , $\triangle PBM$ 의 넓이를 t , $\triangle APM$ 의 넓이를 x 라 하자. 먼저 전체를 세 조각으로 나누면

$$\triangle ABC \text{의 넓이} = 24 + 2t + 36 = 2L \Rightarrow L = 30 + t$$

P가 $\triangle ABM$ 의 내부에 있으므로

$$24 + t + x = L = 30 + t \Rightarrow x = 6$$

이 관계에는 P가 내심이라는 조건이 필요하지 않다.

05 ③

①은 꼭짓점 A에서 직선 BC까지의 높이가 같으므로 옳다. ②는 꼭짓점 P에서 직선 BC까지의 높이가 같으므로 옳다. ④는 선분 BC를 2 : 1로 나누었으므로 옳다.

③의 두 삼각형은 꼭짓점이 서로 다르다. P가 $\triangle ABD$ 의 내부에 있으므로, 같은 밑변인 선분 BD에 대한 P의 높이는 A의 높이보다 작다. 따라서 $\triangle PBD$ 의 넓이는 $\triangle ABD$ 의 넓이보다 작아서 2 : 1이 될 수 없다.

06 17 cm

목표에서 출발: 변 AB를 밑변으로 잡은 $\triangle AIB$ 의 넓이와 높이를 알면 $\overline{AB}$ 의 길이를 구할 수 있다.

필요한 것	조건의 연결	계산
$\triangle AIB$ 의 높이	내심 + 전체 넓이 + 둘레	$r = 2 \times 210 \div 70 = 6$
$\triangle ABD$ 의 넓이	$\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$, 꼭짓점 A 공통	$210 \times \frac{2}{3} = 140$
$\triangle BID$ 의 넓이	$\overline{BD} = 28 \times \frac{2}{3} = \frac{56}{3}$, 높이 6	$\frac{1}{2} \times \frac{56}{3} \times 6 = 56$
$\triangle AIB$ 의 넓이	I가 $\triangle ABD$ 의 내부: $\triangle ABD$ 에서 $\triangle BID$ 와 $\triangle AID$ 를 뺀	$140 - 56 - 33 = 51$
$\overline{AB}$ 의 길이	$51 = \frac{1}{2} \overline{AB} \times 6$	$\overline{AB} = 17 \text{ cm}$

대표 문제의 답을 구하는 공식을 가져오지 않고, 바뀐 밑변의 비와 구할 것에 맞게 넓이 관계를 다시 세운다.