중2 수학 · 2학기 · 도형

중2-2 도형 증명 10

왜 그 선을 긋고, 왜 그 삼각형을 비교할까?

삼각형의 성질 | 사각형의 성질 | 도형의 닮음 | 피타고라스 정리

차례		문제	해설
01	이등변삼각형 안의 두 수선	2	12
02	직각삼각형의 빗변 중점	3	14
03	두 내각의 이등분선이 만나는 점	4	16
04	평행사변형 안의 사각형	5	18
05	마름모의 네 변의 중점을 이은 사각형	6	20
06	사다리꼴 안의 두 삼각형의 넓이	7	22
07	각의 이등분선이 나누는 두 선분	8	24
08	두 중선의 교점과 선분의 길이의 비	9	26
09	빗변에 내린 수선의 길이	10	28
10	피타고라스 정리	11	30

대치동 재우쌤 | 자료실 leessaem.com

© 대치동 재우쌤 | 010-9524-4849 | https://leessaem.com/ | https://blog.naver.com/leessaem84
본 자료는 직접 제작한 학습 자료입니다. 개인 학습을 위한 열람·인쇄는 자유롭게 할 수 있으며, 무단 복제·재배포·수정 후 재배포 및 상업적 이용을 금합니다.

Ⅰ 문제 다음을 증명하시오. 보조선을 그었다면 그리는 방법을, 합동이나 닮음을 사용했다면 대응하는 꼭짓점의 순서와 판정 근거를 쓰시오.

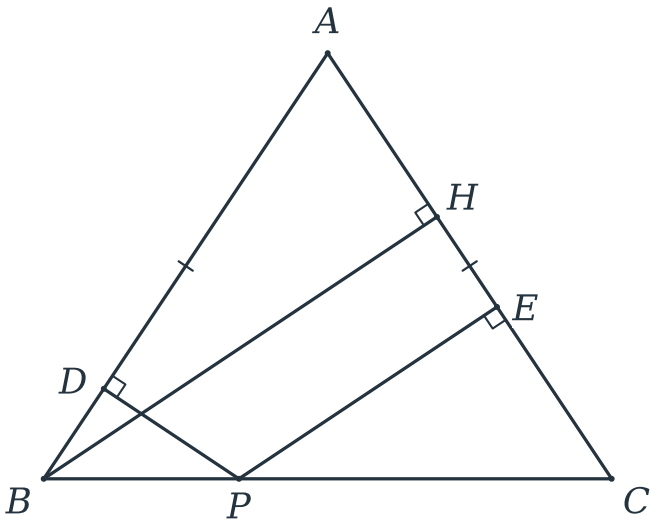
01 이등변삼각형 안의 두 수선

삼각형의 성질

$\overline{AB}=\overline{AC}$인 예각삼각형 ABC에서 점 P는 변 BC 위의 점이고 B, C와는 다르다.
P에서 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
다음을 증명하시오.

$$\overline{PD}+\overline{PE}=\overline{BH}$$

주어진 것	보일 것
$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{PD}\perp\overline{AB}$, $\overline{PE}\perp\overline{AC}$, $\overline{BH}\perp\overline{AC}$	$\overline{PD}+\overline{PE}=\overline{BH}$



증명 기록

- **추가한 선 또는 비교할 도형**
- **핵심 관계와 그 근거**
- **목표 식으로 연결**

02 직각삼각형의 빗변 중점

삼각형의 성질

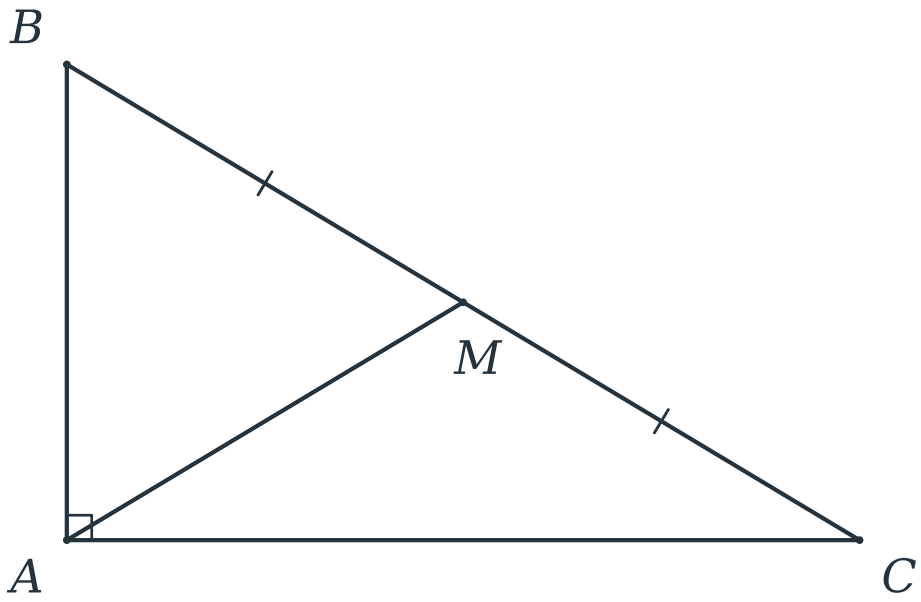
∠BAC = 90°인 직각삼각형 ABC에서 M은 빗변 BC의 중점이다. 다음을 증명하시오.

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$$

단, '직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다'라는 성질을 근거로 사용하지 않는다.

주어진 것	보일 것
∠BAC = 90°, $\overline{BM} = \overline{MC}$	$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$

쓸 수 없는 것 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.



증명 기록

- **추가한 선 또는 비교할 도형**
- **핵심 관계와 그 근거**
- **목표 식으로 연결**

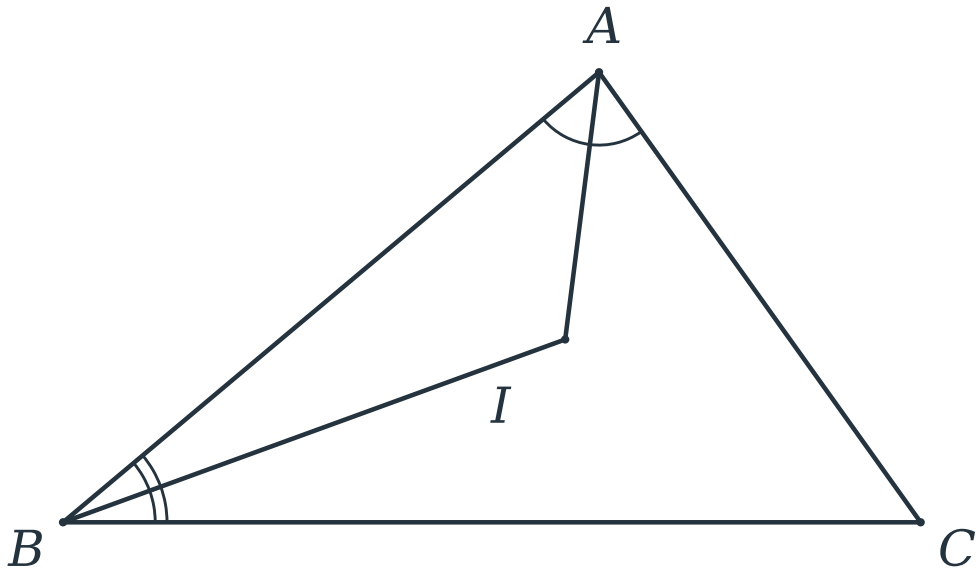
03 두 내각의 이등분선이 만나는 점

삼각형의 성질

예각삼각형 ABC에서 ∠BAC의 이등분선과 ∠ABC의 이등분선이 만나는 점을 I라 하자.
선분 CI도 ∠ACB를 이등분함을 증명하시오.
단, '삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다'라는 성질을 근거로 사용하지 않는다.

주어진 것	**보일 것**
∠BAI = ∠IAC, ∠ABI = ∠IBC	**∠ACI = ∠ICB**

쓸 수 없는 것 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.



증명 기록

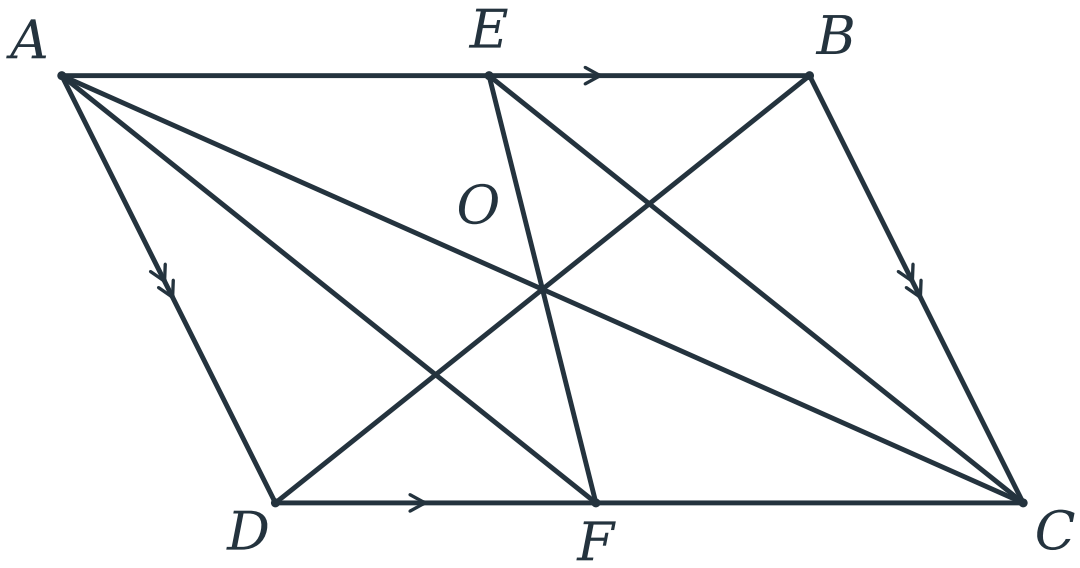
- **추가한 선 또는 비교할 도형**
- **핵심 관계와 그 근거**
- **목표 결론으로 연결**

04 평행사변형 안의 사각형

사각형의 성질

평행사변형 ABCD의 두 대각선이 만나는 점을 O라 하자.
O를 지나는 직선이 변 AB, CD와 만나는 점을 각각 E, F라 한다. E, F는 각 변의 양 끝점과 다르다.
사각형 AECF가 평행사변형임을 증명하시오.

주어진 것	보일 것
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ O: AC와 BD의 교점, 점 O를 지나는 직선이 AB, CD와 만나는 점이 E, F	**사각형 AECF: 평행사변형**



증명 기록

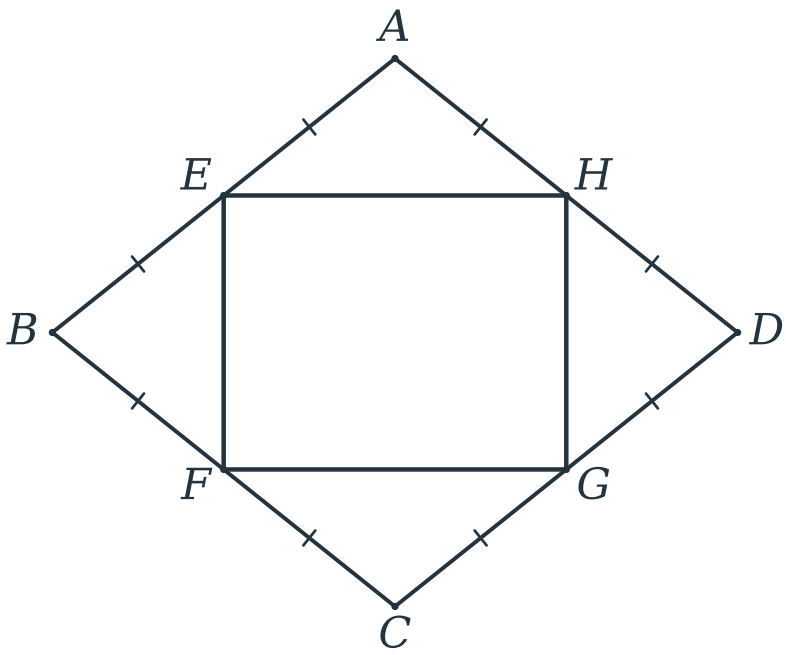
- **비교할 도형**
- **핵심 관계와 그 근거**
- **평행사변형이 되는 조건으로 연결**

05 마름모의 네 변의 중점을 이은 사각형

사각형의 성질

마름모 ABCD의 변 AB, BC, CD, DA의 중점을 각각 E, F, G, H라 하자.
사각형 EFGH가 직사각형임을 증명하시오.

주어진 것	보일 것
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{BF} = \overline{FC}$, $\overline{CG} = \overline{GD}$, $\overline{DH} = \overline{HA}$	**사각형 EFGH: 직사각형**



증명 기록

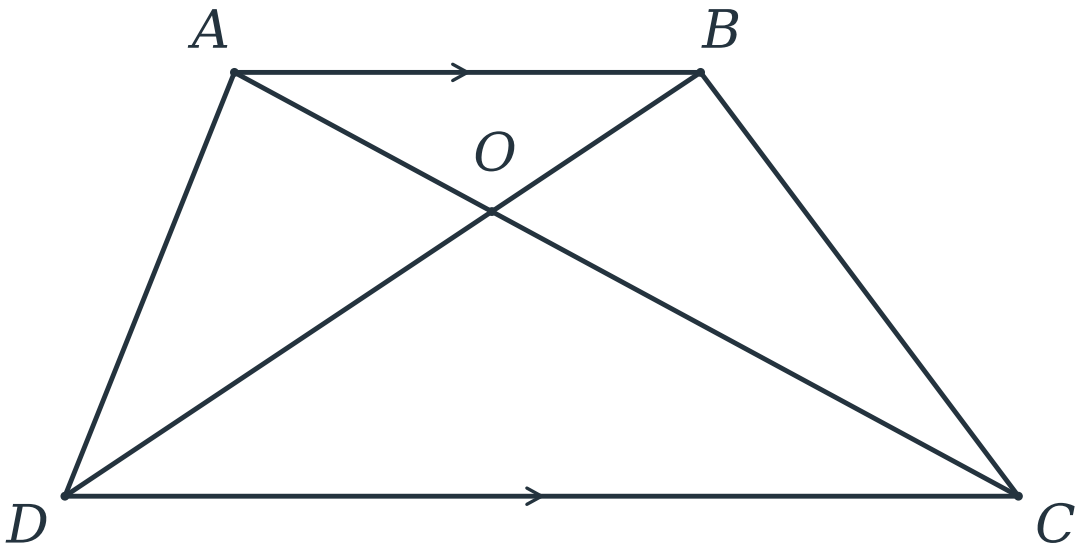
- **추가한 선 또는 비교할 도형**
- **평행 관계와 그 근거**
- **직각이 생기는 이유와 결론**

06 사다리꼴 안의 두 삼각형의 넓이

사각형의 성질

$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$인 사다리꼴 ABCD에서 두 대각선 AC, BD가 만나는 점을 O라 하자.
△AOD의 넓이와 △BOC의 넓이가 같음을 증명하시오.

주어진 것	보일 것
$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ O: AC와 BD의 교점	**△AOD의 넓이 = △BOC의 넓이**



증명 기록

- **먼저 넓이를 비교할 도형**
- **넓이가 같은 이유**
- **목표인 두 넓이로 연결**

07 각의 이등분선이 나누는 두 선분

도형의 닮음

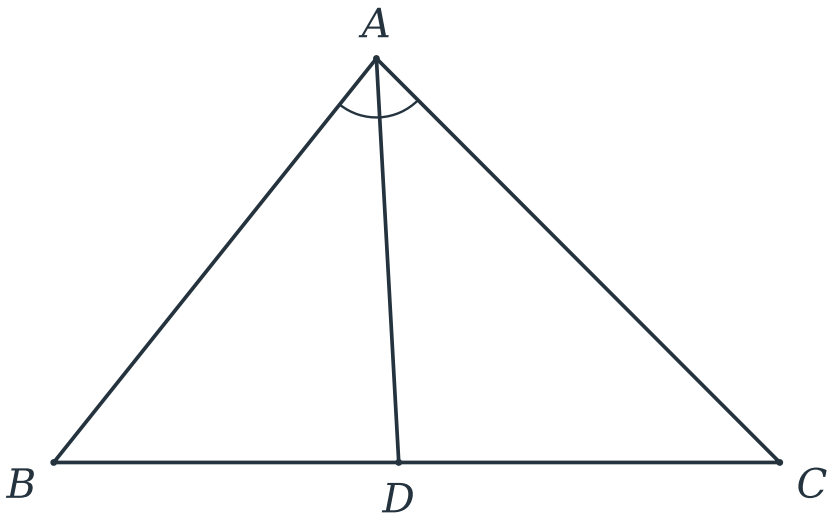
△ABC에서 ∠BAC의 이등분선과 변 BC가 만나는 점을 D라 하자. 다음을 증명하시오.

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

단, '삼각형의 내각의 이등분선에 관한 성질'을 그대로 인용하지 않는다.

주어진 것	**보일 것**
∠BAD = ∠DAC D는 변 BC 위의 점	$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$

쓸 수 없는 것 삼각형의 내각의 이등분선에 관한 성질을 그대로 인용하기.



증명 기록

- **추가한 선 또는 비교할 도형**
- **핵심 관계와 그 근거**
- **목표 비례식으로 연결**

08 두 중선의 교점과 선분의 길이의 비

도형의 닮음

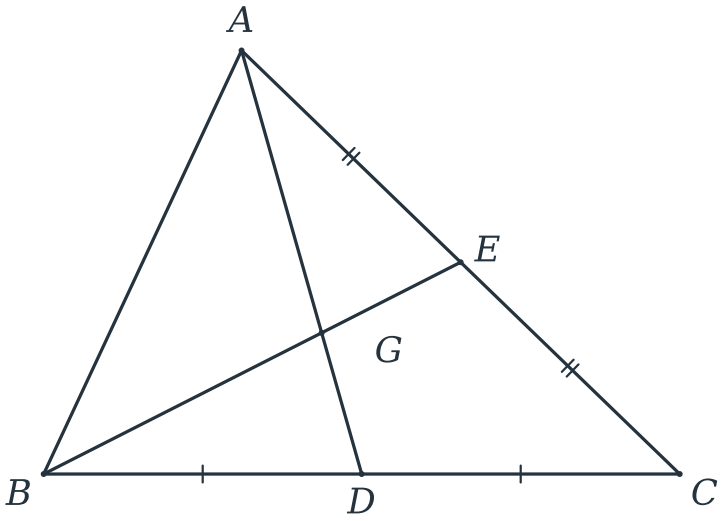
△ABC에서 D, E는 각각 변 BC, CA의 중점이고 두 중선 AD, BE가 만나는 점을 G라 하자. 다음을 증명하시오.

$$\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$$

단, 무게중심이 중선을 2:1로 나눈다는 성질을 근거로 사용하지 않는다.

주어진 것	보일 것
$\overline{BD} = \overline{DC}$, $\overline{CE} = \overline{EA}$ G는 AD와 BE의 교점	$\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$

쓸 수 없는 것 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 2:1로 나눈다.



증명 기록

- **추가한 선 또는 비교할 도형**
- **핵심 관계와 그 근거**
- **목표인 두 비로 연결**

09 빗변에 내린 수선의 길이

도형의 닮음

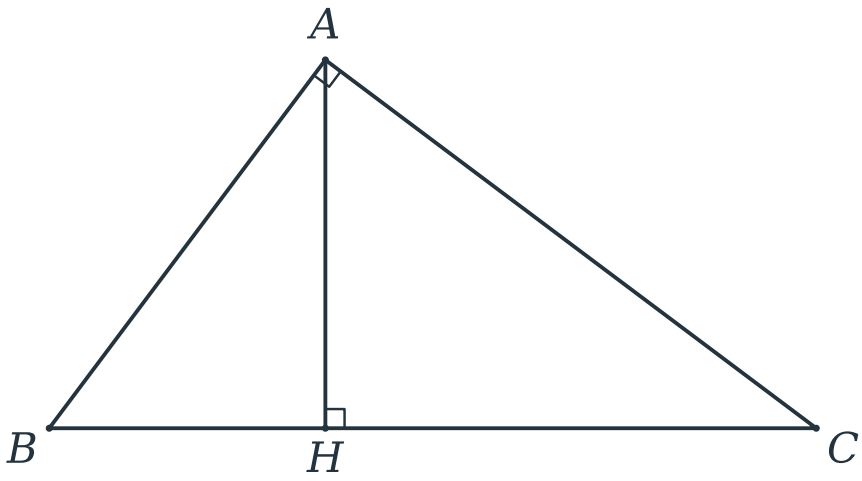
$\angle BAC = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 다음을 증명하시오.

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$$

단, 이 관계식을 알려진 공식으로 인용하지 말고 삼각형의 닮음으로 증명한다.

주어진 것	보일 것
$\angle BAC = 90°$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ H는 변 BC 위의 점	$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$

쓸 수 없는 것 증명할 높이의 제곱 관계식을 알려진 공식으로 인용하기.



증명 기록

- **닮음을 보일 두 삼각형**
- **같은 두 각과 닮음 판정**
- **대응변의 비와 목표 식**

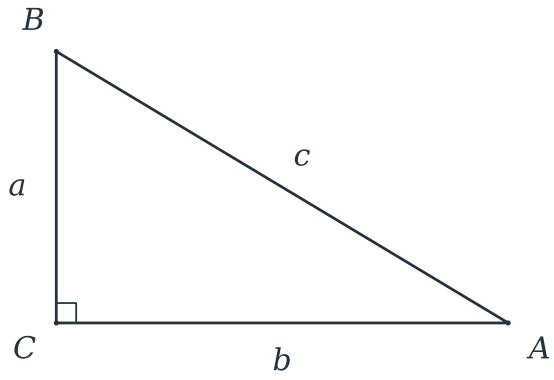
10 피타고라스 정리

피타고라스 정리

$\angle BCA = 90°$인 직각삼각형 ABC에서
$\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$라 하자.
한 변의 길이가 $a + b$인 정사각형 두 개에, 이 삼각형과 합동인 직각삼각형을 4개씩 서로 다르게 배열하여 다음을 증명하시오.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

단, 피타고라스 정리를 이용하여 배열한 도형의 변의 길이나 각의 크기를 구하지 않는다.



주어진 것	보일 것
$\angle BCA = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$	$a^2 + b^2 = c^2$

쓸 수 없는 것 피타고라스 정리를 이용해 배열한 도형의 길이나 각을 구하기.

증명 기록

- **배열한 두 도형의 스케치**

- **남은 도형이 정사각형인 이유**

- **넓이 비교와 결론**

II 정답과 증명 해설

01 길이의 합을 두 삼각형의 넓이로 바꾸기

삼각형의 성질

조건 → 수식

이등변삼각형	→	$\overline{AB} = \overline{AC}$.
수선의 길이	→	PD는 밑변 AB에 대한 높이, PE와 BH는 밑변 AC에 대한 높이.
목표	→	**$\overline{PD} + \overline{PE}$라는 합을 한 식에 넣어야 한다.**

Q 수선의 길이를 더해야 하는데 왜 넓이를 생각할까?

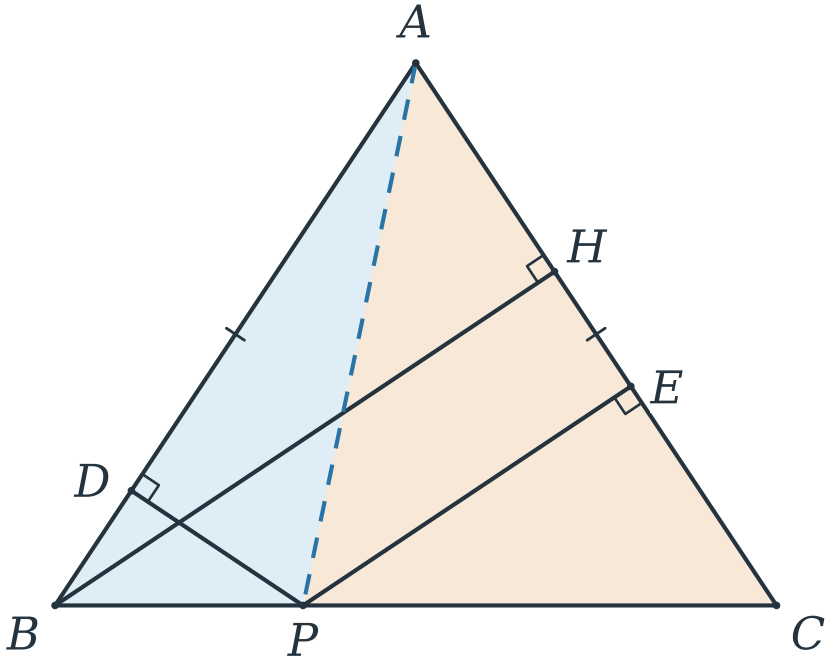
A 삼각형의 넓이는 '밑변 × 높이 ÷ 2'이다. AB와 AC의 길이가 같으므로 PD, PE를 각각 높이로 쓰면 두 넓이의 식에서 같은 밑변 길이를 묶을 수 있다.

Q 왜 A와 P를 이을까?

A △ABC를 PD가 높이인 △ABP와 PE가 높이인 △APC로 정확히 나누기 위해서다.

증명 흐름

1. AP를 긋는다 ▶
2. △ABP의 넓이 + △APC의 넓이 = △ABC의 넓이 ▶
3. $\frac{1}{2}s \times \overline{PD} + \frac{1}{2}s \times \overline{PE} = \frac{1}{2}s \times \overline{BH}$ ▶
4. $\overline{PD} + \overline{PE} = \overline{BH}$



증명	식(주장)	근거
01	선분 AP를 긋는다. $\overline{AB} = \overline{AC} = s$	이등변삼각형의 같은 두 변의 길이를 s로 놓는다.
02	$\triangle ABC$의 넓이 = $\triangle ABP$의 넓이 + $\triangle APC$의 넓이 $= \frac{1}{2}s \times \overline{PD} + \frac{1}{2}s \times \overline{PE}$	P가 변 BC 위에 있으므로 두 삼각형으로 나뉜다. 밑변 AB, AC의 길이는 모두 s이고 대응하는 높이는 각각 PD, PE이다.
03	$\triangle ABC$의 넓이 = $\frac{1}{2}s \times \overline{BH}$	같은 삼각형에서 밑변을 AC로 잡으면 높이는 BH이다.
04	$\frac{1}{2}s \times \overline{PD} + \frac{1}{2}s \times \overline{PE} = \frac{1}{2}s \times \overline{BH}$ $\therefore \overline{PD} + \overline{PE} = \overline{BH}$	같은 $\triangle ABC$의 넓이식 두 개를 비교한 뒤 양변을 양수 $\frac{1}{2}s$로 나눈다.

막히기 쉬운 지점

✗ 수선의 방향이 다르므로 $\overline{PD} + \overline{PE}$를 하나의 식으로 연결할 수 없다.

✓ **AP로 나눈 두 삼각형의 넓이를 더하면, 같은 밑변 길이 s를 통해 두 높이 $\overline{PD} + \overline{PE}$를 연결할 수 있다.**

증명 기록의 답 예

추가한 선 또는 비교할 도형	선분 AP.
핵심 관계와 그 근거	같은 길이의 밑변 AB, AC에 대한 두 넓이식을 더한다.
목표 식으로 연결	같은 $\triangle ABC$의 넓이식 두 개를 비교한 뒤 양변을 $\frac{1}{2}s$로 나눈다.

02 중선을 같은 길이만큼 연장해 직사각형 만들기

삼각형의 성질

조건 → 수식

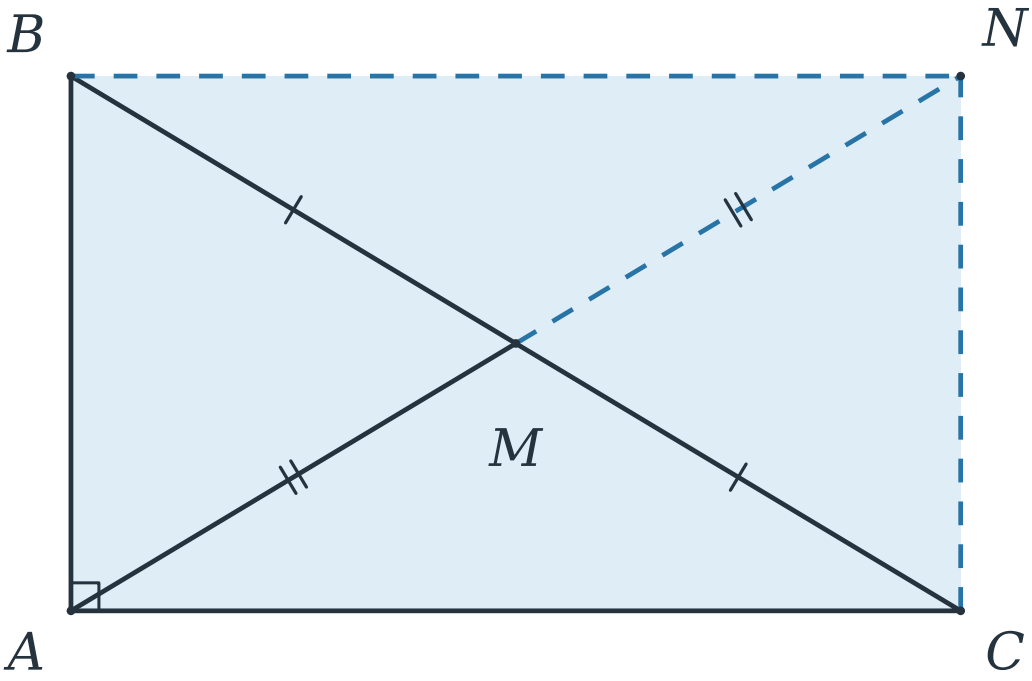
빗변의 중점	→	$\overline{MB} = \overline{MC}$.
직각삼각형	→	$\angle BAC = 90°$.
목표	→	**아직 길이를 모르는 MA를 MB, MC와 연결해야 한다.**

Q 왜 AM을 같은 길이만큼 연장할까?

Ⓐ M을 AM과 이어지는 새 선분의 중점으로 만들면, M이 두 대각선의 공통 중점인 사각형이 생긴다. 이 사각형을 이용하면 AM과 BC를 대각선 길이로 비교할 수 있다.

증명 흐름

1 AM을 연장해 $\overline{MA} = \overline{MN}$ ▶ 2 사각형 ABNC는 직사각형 ▶ 3 $\overline{AN} = \overline{BC}$ ▶ 4 **$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$**



증명	식(주장)	근거
01	AM의 연장선 위에 $\overline{MA}=\overline{MN}$인 점 N을 잡는다. 선분 BN, CN을 긋는다.	AM을 M 쪽으로 같은 길이만큼 연장한다.
02	$\overline{MA}=\overline{MN}$, $\overline{MB}=\overline{MC}$ **∴ 사각형 ABNC는 평행사변형**	두 대각선 AN, BC가 M에서 서로를 이등분한다.
03	$\angle BAC=90°$ **∴ 사각형 ABNC는 직사각형**	한 내각이 직각인 평행사변형이다.
04	**△ABN과 △BAC에서** $\overline{AB}=\overline{BA}$ $\overline{BN}=\overline{AC}$ $\angle ABN=\angle BAC=90°$ **∴ △ABN ≡ △BAC (SAS 합동)** **∴ $\overline{AN}=\overline{BC}$**	공통인 변 평행사변형의 대변 직사각형의 내각 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 각각 같다. 합동인 삼각형의 대응변
05	$\overline{MA}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{MB}=\overline{MC}$	M은 AN과 BC의 중점이다.

Q 04단계 대신 '직사각형의 두 대각선의 길이는 같다'를 바로 써도 될까?

A 써도 된다. 사각형의 성질에서 배운 내용이다. 04단계는 그 성질이 성립하는 이유를 합동으로 다시 보인 것이다.

막히기 쉬운 지점

✗ $\overline{MB}=\overline{MC}$이므로 곧바로 $\overline{MA}=\overline{MB}$이다.

✓ **A의 직각 조건으로 새 사각형이 직사각형임을 보인 뒤, 같은 두 대각선을 각각 절반으로 나누어 비교한다.**

증명 기록의 답 예

추가한 선 또는 비교할 도형	AM을 M 쪽으로 연장하여 $\overline{MA}=\overline{MN}$인 N을 잡고 BN, CN을 긋는다.
핵심 관계와 그 근거	사각형 ABNC의 대각선이 서로를 이등분하고 한 내각이 직각이므로 직사각형이다.
목표 식으로 연결	SAS 합동으로 $\overline{AN}=\overline{BC}$를 얻고 두 대각선을 각각 절반으로 나눈다.

03 각의 이등분을 세 수선의 길이로 연결하기

삼각형의 성질

조건 → 수식

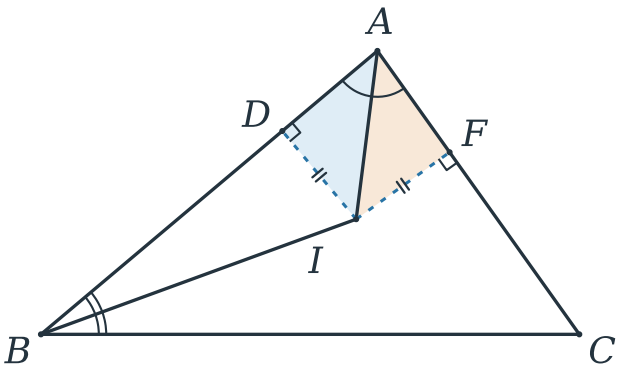
A의 내각 이등분	→	$\angle BAI = \angle IAC$.
B의 내각 이등분	→	$\angle ABI = \angle IBC$.
목표	→	**$\angle ACI = \angle ICB$.**

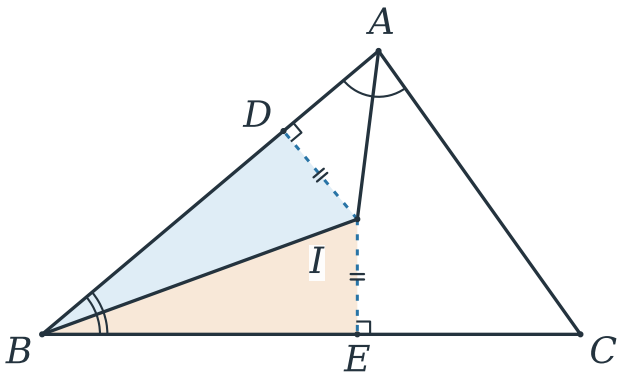
Q **A와 B에서 주어진 각을 어떻게 C의 각으로 옮길까?**

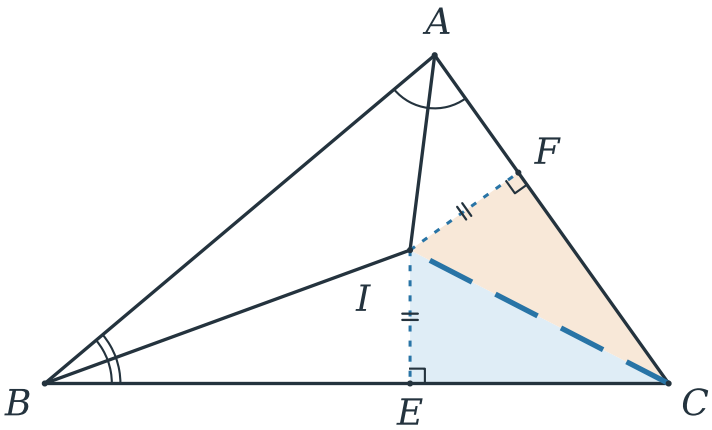
A I에서 세 변에 수선을 내린다. 각의 이등분 조건으로 직각삼각형의 합동을 보이면, I에서 두 변까지의 거리가 같다는 길이 조건을 얻을 수 있다. 이 길이들을 연결한 뒤 C를 포함하는 직각삼각형을 비교한다.

증명 흐름

1. 세 수선을 내려 RHA 합동 두 쌍
2. $\overline{ID} = \overline{IF}$, $\overline{ID} = \overline{IE}$이므로 $\overline{IE} = \overline{IF}$
3. $\triangle CIE \equiv \triangle CIF$ (RHS 합동)
4. **$\angle BCI = \angle ICA$**







증명	식(주장)	근거
01	I에서 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다. 선분 CI를 긋는다.	각의 이등분 조건을 점과 직선 사이의 거리와 연결한다.

증명	식(주장)	근거
02	**△AID와 △AIF에서** ∠ADI = ∠AFI = 90° $\overline{AI} = \overline{AI}$ ∠DAI = ∠FAI **∴ △AID ≡ △AIF (RHA 합동)** **∴ $\overline{ID} = \overline{IF}$**	 수선 공통인 빗변 AI는 ∠BAC의 이등분선 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같다. 합동인 삼각형의 대응변
03	**△BID와 △BIE에서** ∠BDI = ∠BEI = 90° $\overline{BI} = \overline{BI}$ ∠DBI = ∠EBI **∴ △BID ≡ △BIE (RHA 합동)** **∴ $\overline{ID} = \overline{IE}$**	 수선 공통인 빗변 BI는 ∠ABC의 이등분선 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같다. 합동인 삼각형의 대응변
04	$\overline{IE} = \overline{IF}$	$\overline{ID} = \overline{IF}$, $\overline{ID} = \overline{IE}$를 연결한다.
05	**△CIE와 △CIF에서** ∠CEI = ∠CFI = 90° $\overline{CI} = \overline{CI}$ $\overline{IE} = \overline{IF}$ **∴ △CIE ≡ △CIF (RHS 합동)**	 수선 공통인 빗변 04단계의 결과 두 직각삼각형의 빗변과 다른 한 변의 길이가 각각 같다.
06	∠ECI = ∠FCI **∴ ∠BCI = ∠ICA** **∴ CI는 ∠ACB의 이등분선**	합동인 삼각형의 대응각 E는 BC 위, F는 CA 위에 있다.

막히기 쉬운 지점

✗ I는 내각의 이등분선의 교점이므로 $\overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC}$이다.

✓ **내각의 이등분선은 점과 직선 사이의 거리와 연결된다. 여기서 보일 길이 관계는 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$이다.**

증명 기록의 답 예

추가한 선 또는 비교할 도형	I에서 세 변에 내린 수선 ID, IE, IF와 선분 CI.
핵심 관계와 그 근거	RHA 합동 두 쌍으로 $\overline{ID} = \overline{IF}$, $\overline{ID} = \overline{IE}$를 얻어 $\overline{IE} = \overline{IF}$로 연결한다.
목표 결론으로 연결	△CIE와 △CIF의 RHS 합동으로 ∠BCI = ∠ICA를 보인다.

04 원래 평행사변형의 성질을 새 사각형의 판정 조건으로 바꾸기

사각형의 성질

조건 → 수식

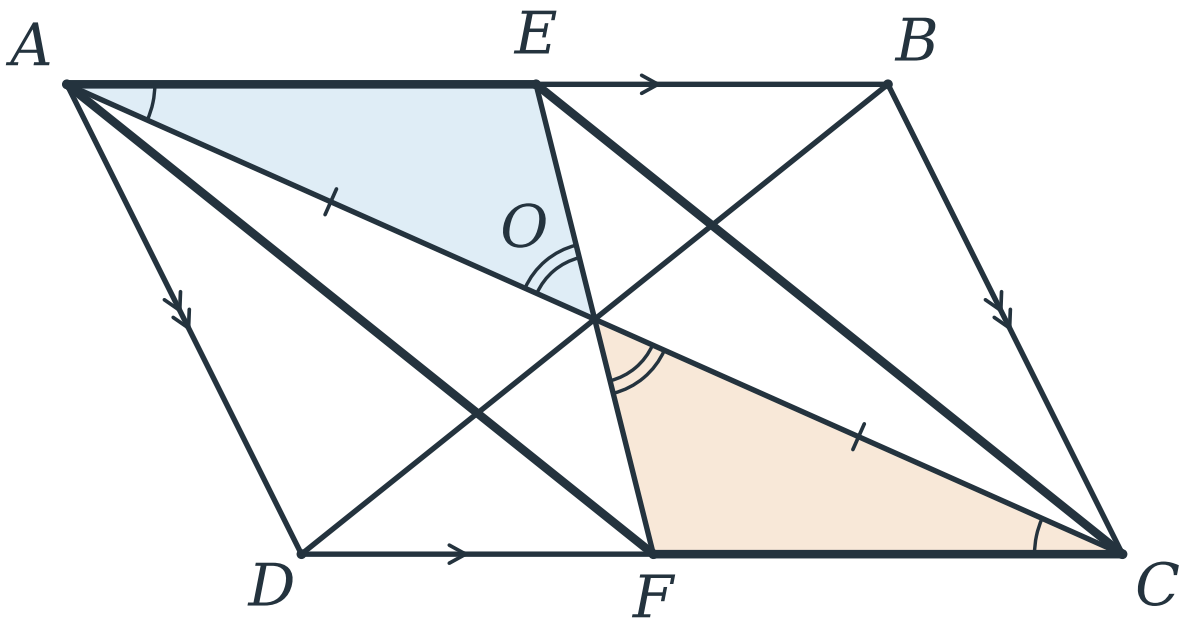
ABCD가 평행사변형	→	$\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$.
E, O, F가 일직선	→	$\angle AOE$와 $\angle COF$는 맞꼭지각.
목표	→	**AECF의 대각선 AC, EF가 서로를 이등분함을 보인다.**

Q 원래 평행사변형의 성질만으로 새 사각형도 평행사변형일까?

Ⓐ 새 사각형의 대각선은 AC와 EF이다. AC가 O에서 이등분된다는 것은 알지만 EF도 O에서 이등분된다는 것은 아직 모른다. 따라서 OE와 OF가 같음을 따로 보여야 한다.

증명 흐름

1 ABCD의 대각선·평행 관계 ▶ 2 △AOE ≡ △COF (ASA 합동) ▶ 3 $\overline{OE}=\overline{OF}$ ▶ 4 **AECF의 두 대각선은 서로를 이등분**



증명	식(주장)	근거
01	$\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$	ABCD는 평행사변형이다.
02	**△AOE와 △COF에서** $\overline{AO}=\overline{CO}$ $\angle OAE=\angle OCF$ $\angle AOE=\angle COF$ **∴ △AOE ≡ △COF (ASA 합동)**	평행사변형의 대각선은 서로를 이등분한다. $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$일 때의 엇각 맞꼭지각 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 각각 같다.
03	$\overline{OE}=\overline{OF}$	합동인 삼각형의 대응변
04	$\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{OE}=\overline{OF}$ **∴ 사각형 AECF는 평행사변형**	새 사각형의 두 대각선 AC, EF가 O에서 서로를 이등분한다.

막히기 쉬운 지점

✗ ABCD가 평행사변형이니까 $\overline{OE}=\overline{OF}$이다.

✓ EF는 ABCD의 대각선이 아니다. △AOE ≡ △COF를 보인 뒤 $\overline{OE}=\overline{OF}$를 쓴다.

증명 기록의 답 예

비교할 도형	△AOE와 △COF.
핵심 관계와 그 근거	$\overline{AO}=\overline{CO}$, 엇각과 맞꼭지각의 같음으로 ASA 합동이다.
평행사변형이 되는 조건으로 연결	$\overline{OE}=\overline{OF}$를 얻어 AC, EF가 서로를 이등분함을 보인다.

05 원래 마름모의 대각선과 새 사각형의 변을 연결하기

사각형의 성질

조건 → 수식

E, F, G, H는 각 변의 중점	→	삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 사용할 수 있다.
ABCD는 마름모	→	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
목표	→	**EFGH의 두 쌍의 대변이 각각 평행하고 한 내각이 직각임을 보인다.**

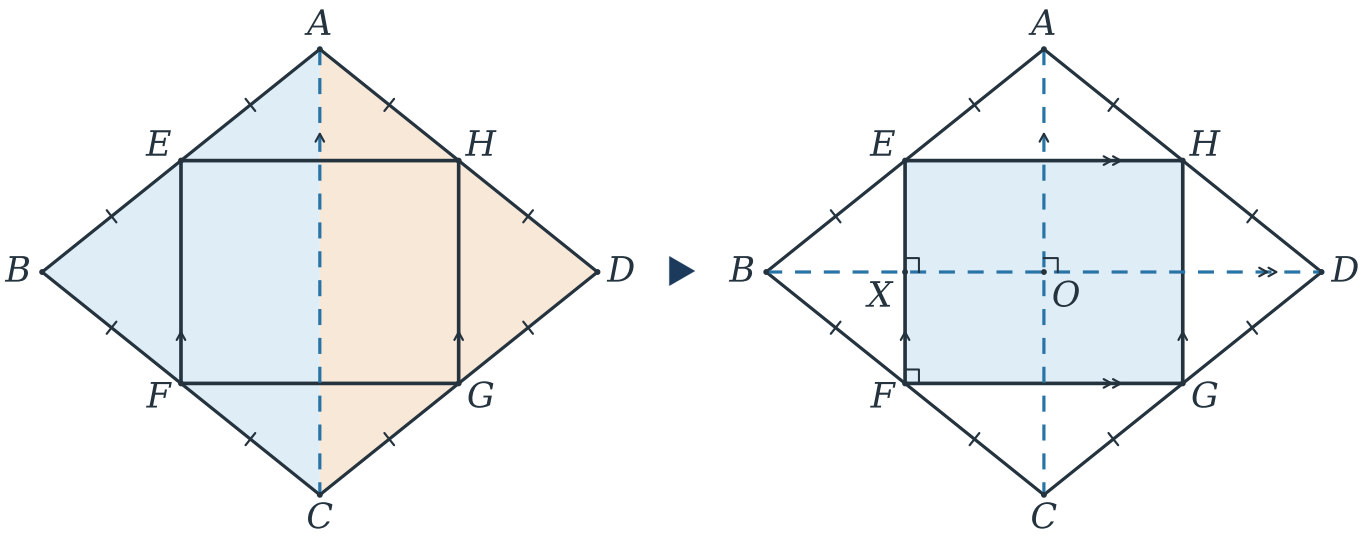
사용할 성질 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 한 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

Q 중점 네 개를 이었는데 왜 원래 마름모의 대각선을 그을까?

A 새 사각형의 변 하나는, 원래 꼭짓점 세 개로 만든 삼각형에서 두 변의 중점을 이은 선분이다. 대각선을 그으면 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 적용할 삼각형이 드러난다.

증명 흐름

1 AC, BD를 긋는다 ▶ 2 두 변의 중점을 이은 선분의 성질 ▶ 3 EFGH는 평행사변형, $\angle EFG = 90°$ ▶ 4 **EFGH는 직사각형**



증명	식(주장)	근거
01	선분 AC, BD를 긋는다. O: AC와 BD의 교점 X: EF와 BD의 교점	중점을 잇는 선분과 원래 마름모의 대각선을 연결한다.
02	$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ **$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{HG}$**	△ABC와 △ADC에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 각각 사용한다.
03	$\overline{FG} \parallel \overline{BD}$, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ **$\therefore \overline{FG} \parallel \overline{EH}$** **$\therefore$ 사각형 EFGH는 평행사변형**	△BCD와 △BAD에서 같은 성질을 사용한다. 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
04	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ **$\therefore \angle AOD = 90°$**	마름모의 두 대각선은 서로 수직이다.
05	$\angle EXO = \angle AOD = 90°$	$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$이고 직선 BD가 두 직선과 만나므로 두 각은 동위각이다.
06	$\angle EFG = \angle EXO = 90°$	$\overline{FG} \parallel \overline{BD}$이고 직선 EF가 두 직선과 만나므로 두 각은 동위각이다.
07	**$\therefore$ 사각형 EFGH는 직사각형**	한 내각이 직각인 평행사변형이다.

막히기 쉬운 지점

✗ 네 변의 중점을 이으면 언제나 직사각형이 된다.

✓ **중점을 연결한 선분의 성질로 먼저 평행사변형임을 보인다. 직사각형임을 보이려면 원래 마름모의 대각선이 서로 수직이라는 조건도 필요하다.**

증명 기록의 답 예

추가한 선 또는 비교할 도형	대각선 AC, BD. 그 교점을 O, EF와 BD의 교점을 X라 한다.
평행 관계와 그 근거	네 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 적용해 두 쌍의 대변이 각각 평행함을 보인다.
직각이 생기는 이유와 결론	마름모의 대각선이 수직이고 $\angle AOD = \angle EXO = \angle EFG = 90°$이므로 직사각형이다.

06 같은 큰 넓이에서 공통인 작은 넓이 빼기

사각형의 성질

조건 → 수식

$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$	→	A, B에서 직선 CD까지의 거리가 같다.
목표	→	**모양이 다른 △AOD와 △BOC의 넓이를 비교한다.**

Q 두 삼각형의 모양이 다른데 넓이가 같을 수 있을까?

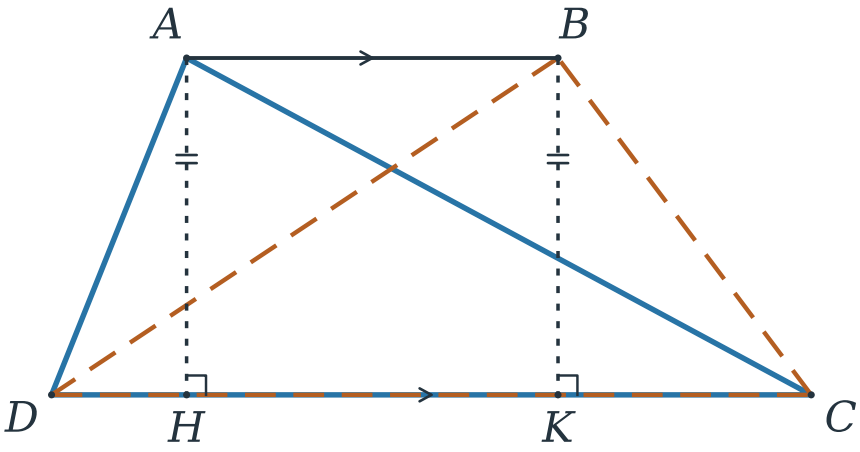
A 그렇다. 넓이가 같다고 해서 합동인 것은 아니다. 여기서는 먼저 밑변과 높이가 같은 두 큰 삼각형을 찾는다.

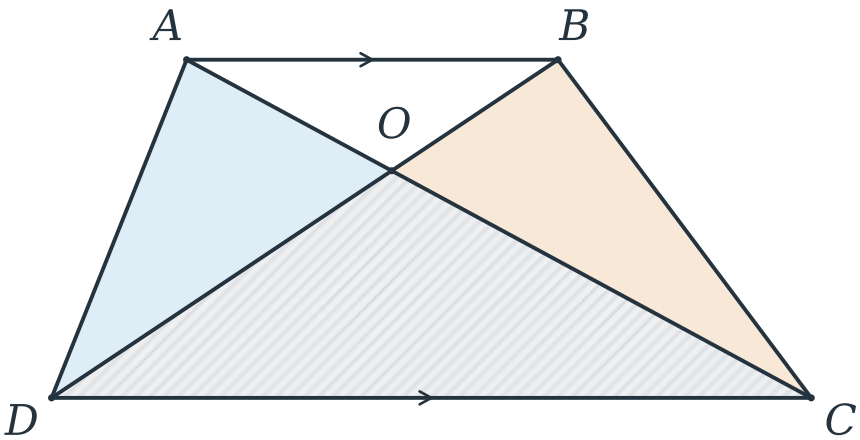
Q 왜 △ADC와 △BDC를 비교할까?

A 둘은 밑변 CD가 공통이고 높이가 같다. 또 두 삼각형에서 공통인 △DOC를 빼면 각각 목표인 △AOD와 △BOC가 남는다.

증명 흐름

1. 밑변 CD가 공통이고 높이가 같다
2. △ADC의 넓이 = △BDC의 넓이
3. 양쪽에서 △DOC의 넓이를 뺀다
4. **△AOD의 넓이 = △BOC의 넓이**





증명	식(주장)	근거
01	A, B에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 한다. $\overline{AH} \perp \overline{CD}$, $\overline{BK} \perp \overline{CD}$	△ADC와 △BDC의 높이를 표시한다.
02	$\overline{AH} = \overline{BK}$	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$이므로 평행한 두 직선 사이의 거리가 같다.
03	△ADC의 넓이 = △BDC의 넓이	밑변 CD가 공통이고 높이 AH, BK가 같다.
04	△AOD의 넓이 = △ADC의 넓이 − △DOC의 넓이 △BOC의 넓이 = △BDC의 넓이 − △DOC의 넓이	큰 삼각형에서 공통인 △DOC를 각각 뺀다.
05	**∴ △AOD의 넓이 = △BOC의 넓이**	같은 넓이에서 같은 넓이를 빼면 남은 넓이도 같다.

막히기 쉬운 지점

✕ △AOD와 △BOC의 넓이가 같으므로 두 삼각형은 합동이다.

✓ **넓이가 같아도 모양은 다를 수 있다. 여기서는 O가 중점이라는 가정 없이 같은 큰 넓이에서 공통인 △DOC의 넓이를 뺀다.**

증명 기록의 답 예

먼저 넓이를 비교할 도형	△ADC와 △BDC.
넓이가 같은 이유	밑변 CD가 공통이고 평행선 AB, CD 사이의 두 높이 AH, BK가 같다.
목표인 두 넓이로 연결	양쪽에서 공통인 △DOC의 넓이를 뺀다.

07 각의 이등분선을 평행선으로 옮겨 이등변삼각형 만들기

도형의 닮음

조건 → 수식

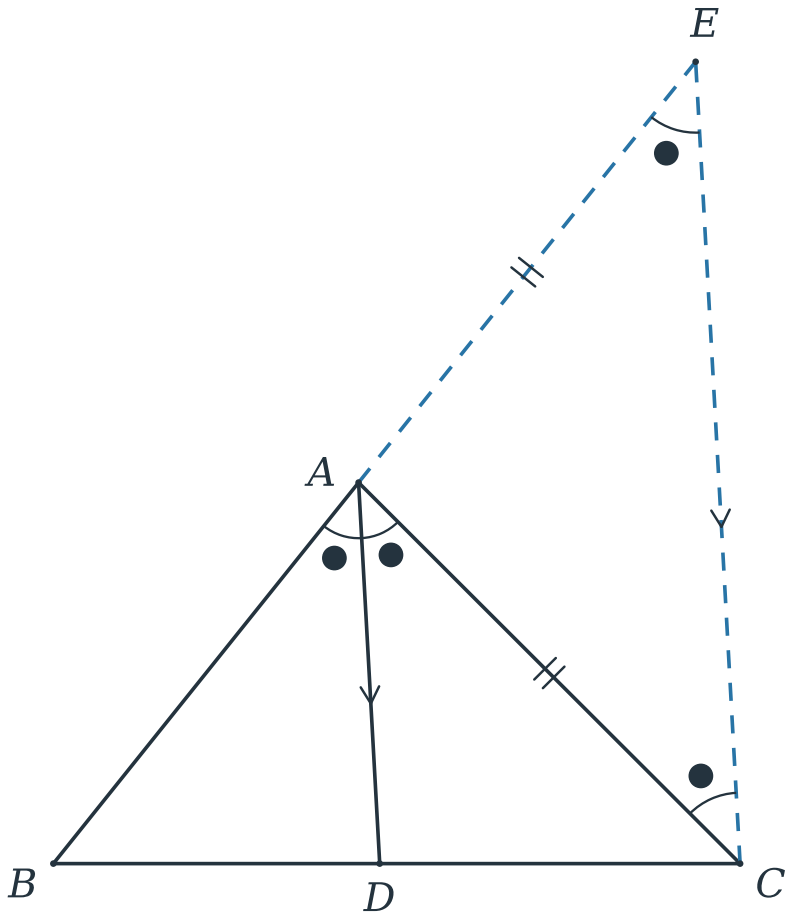
AD가 ∠BAC의 이등분선	→	∠BAD = ∠DAC.
목표	→	**$\overline{BD}:\overline{DC}$와 $\overline{AB}:\overline{AC}$를 연결한다.**

Q 각이 같다는 조건으로 어떻게 길이의 비를 만들까?

Ⓐ AD에 평행한 선을 그으면 같은 각을 다른 꼭짓점으로 옮길 수 있다. 그 결과 이등변삼각형을 만들면 AC와 길이가 같은 선분을 AB의 연장선 위에 놓을 수 있다.

증명 흐름

1. BA를 연장하고 $\overline{AD} \parallel \overline{CE}$
2. ∠AEC = ∠ACE이므로 $\overline{AE} = \overline{AC}$
3. $\overline{BA}:\overline{AE} = \overline{BD}:\overline{DC}$
4. **$\overline{BD}:\overline{DC} = \overline{AB}:\overline{AC}$**



증명	식(주장)	근거
01	BA를 A 쪽으로 연장한다. $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$가 되도록 E를 잡는다. E는 BA의 연장선 위의 점이다.	C를 지나 AD에 평행한 직선과 BA의 연장선의 교점이 E이다.
02	$\angle AEC = \angle BAD$ $\angle ACE = \angle DAC$	$\overline{AD} \parallel \overline{CE}$일 때의 동위각 $\overline{AD} \parallel \overline{CE}$일 때의 엇각
03	$\angle BAD = \angle DAC$ $\therefore \angle AEC = \angle ACE$ $\therefore \overline{AE} = \overline{AC}$	AD는 $\angle BAC$의 이등분선 02단계의 각의 같음을 연결 두 각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.
04	$\triangle BEC$에서 $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$ $\therefore \overline{BA} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{DC}$	삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비
05	$\therefore \overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$	$\overline{AE} = \overline{AC}$를 대입한다.

막히기 쉬운 지점

✗ AD는 각의 이등분선이므로 $\overline{BD} = \overline{DC}$이다.

✓ $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$이다. $\overline{AB} = \overline{AC}$일 때에만 $\overline{BD} = \overline{DC}$이다.

증명 기록의 답 예

추가한 선 또는 비교할 도형	BA를 연장하고 C에서 AD에 평행한 직선을 그어 교점을 E라 한다.
핵심 관계와 그 근거	같은 각을 옮겨 $\triangle ACE$가 이등변삼각형임을 보이고 $\overline{AE} = \overline{AC}$를 얻는다.
목표 비례식으로 연결	삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비를 쓰고 AE의 길이를 AC의 길이로 바꾼다.

08 두 중점을 이어 크기가 2배인 삼각형 찾기

도형의 닮음

조건 → 수식

D, E는 각각 BC, CA의 중점	→	DE를 그으면 △ABC에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 쓸 수 있다.
G는 AD, BE의 교점	→	A, G, D와 B, G, E는 각각 한 직선 위에 있다.
목표	→	**AG와 GD, BG와 GE가 각각 대응하는 닮은 두 삼각형을 찾는다.**

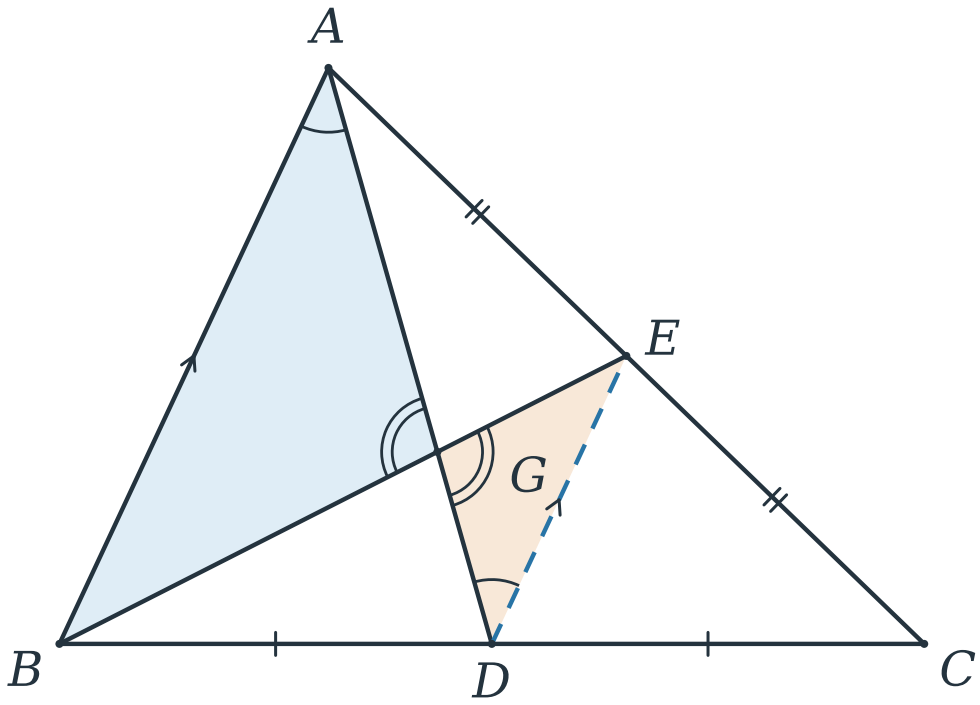
사용할 성질 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 한 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

Q 왜 두 중점 D, E를 이을까?

Ⓐ DE는 AB와 평행하고 그 길이는 AB의 절반이다. 따라서 △GAB와 △GDE를 비교하면, 증명하려는 선분비가 닮은 삼각형의 대응변의 비로 나타난다.

증명 흐름

1. DE를 긋는다 ▶
2. $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AB} : \overline{DE} = 2 : 1$ ▶
3. $\triangle GAB \backsim \triangle GDE$ (AA 닮음) ▶
4. $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$



증명	식(주장)	근거
01	선분 DE를 긋는다. $\overline{DE} \parallel \overline{BA}$, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BA}$	△ABC에서 D, E는 각각 BC, CA의 중점이다. 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 사용한다.
02	**△GAB와 △GDE에서** ∠AGB = ∠DGE ∠GAB = ∠GDE **∴ △GAB ∽ △GDE (AA 닮음)**	맞꼭지각 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$일 때의 엇각 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같다.
03	대응하는 꼭짓점: G↔G, A↔D, B↔E **∴ $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{AB} : \overline{DE}$**	닮은 두 삼각형에서 대응변의 길이의 비는 같다.
04	$\overline{AB} : \overline{DE} = 2 : 1$ **∴ $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$**	01단계에서 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$이다.

막히기 쉬운 지점

✗ $\overline{AD} : \overline{GD} = 2 : 1$이다.

✓ $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$이고 전체와 짧은 부분의 비는 $\overline{AD} : \overline{GD} = 3 : 1$이다.

증명 기록의 답 예

추가한 선 또는 비교할 도형	선분 DE.
핵심 관계와 그 근거	△ABC에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질로 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AB} : \overline{DE} = 2 : 1$을 얻는다.
목표인 두 비로 연결	△GAB와 △GDE의 AA 닮음으로 대응변의 길이의 비를 옮긴다.

09 같은 길이 AH를 서로 다른 대응변으로 사용하기

도형의 닮음

조건 → 수식

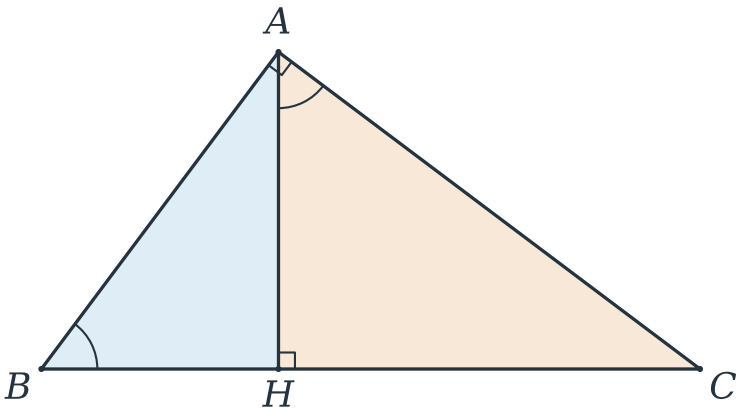
$\angle BAC = 90°$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$	→	H 양쪽의 삼각형이 모두 직각삼각형이다.
목표	→	**AH가 두 번 곱해지는 식을 얻는다.**

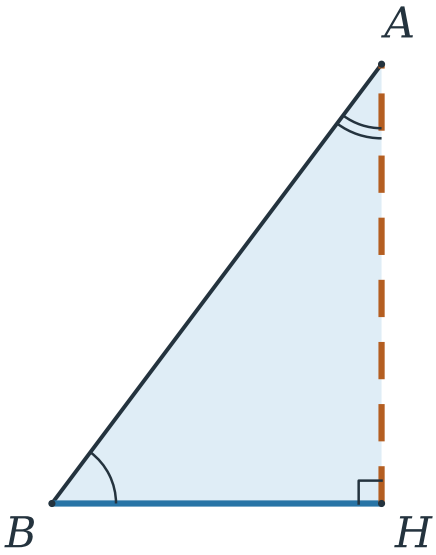
Q 목표 식을 보고 어떤 두 삼각형을 고를까?

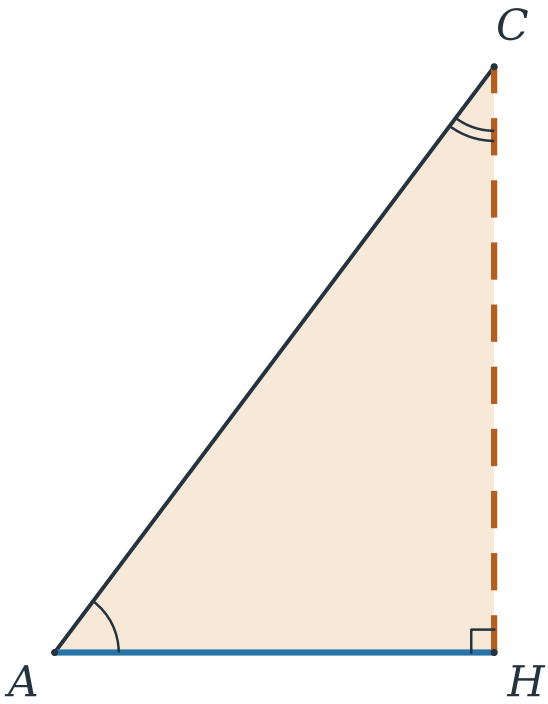
Ⓐ AH, BH, CH를 함께 포함하는 △BAH와 △ACH를 고른다. 이 둘이 닮으면 AH가 한 삼각형에서는 한 변, 다른 삼각형에서는 다른 변에 대응한다.

증명 흐름

1. 두 직각과 같은 예각 찾기 ▶
2. △BAH ∽ △ACH (AA 닮음) ▶
3. $\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{CH}$ ▶
4. $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$







증명	식(주장)	근거
01	$\angle BHA = \angle AHC = 90°$	$\overline{AH} \perp \overline{BC}$, H는 BC 위의 점이다.
02	$\angle ABH = \angle ABC = 90° - \angle ACB$	직각삼각형 ABC의 두 예각의 크기의 합은 90°이다.
03	$\angle CAH = 90° - \angle ACH$ $\angle ACH = \angle ACB$ **$\therefore\ \angle ABH = \angle CAH$**	직각삼각형 ACH의 두 예각의 크기의 합은 90°이다. H는 변 BC 위의 점이므로 $\angle ACH$와 $\angle ACB$는 같은 각이다. 02단계와 비교한다.
04	**△BAH와 △ACH에서** $\angle BHA = \angle AHC = 90°$ $\angle ABH = \angle CAH$ **$\therefore\ \triangle BAH \backsim \triangle ACH$ (AA 닮음)**	 01단계에서 확인한 두 직각 03단계에서 확인한 두 예각 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같다.
05	대응하는 꼭짓점: B↔A, A↔C, H↔H **$\therefore\ \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$**	닮은 삼각형의 대응변의 길이의 비는 같다. 분리 그림에서도 같은 위치의 변을 비교한다.
06	**$\therefore\ \overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$**	양변에 양수 $\overline{AH} \times \overline{CH}$를 곱한다.

막히기 쉬운 지점

✗ AH는 공통인 선분이므로 두 삼각형에서 AH끼리 대응한다.

✓ **△BAH ∽ △ACH에서 대응은 변 BH↔변 AH, 변 AH↔변 CH이다. 같은 방향으로 놓은 분리 그림에서 확인한다.**

증명 기록의 답 예

닮음을 보일 두 삼각형	△BAH와 △ACH.
같은 두 각과 닮음 판정	$\angle BHA = \angle AHC = 90°$, $\angle ABH = \angle CAH$이므로 AA 닮음이다.
대응변의 비와 목표 식	$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{CH}$를 곱셈식으로 바꾼다.

10 같은 넓이에서 같은 네 삼각형의 넓이 빼기

피타고라스 정리

조건 → 수식

$\angle BCA = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$.

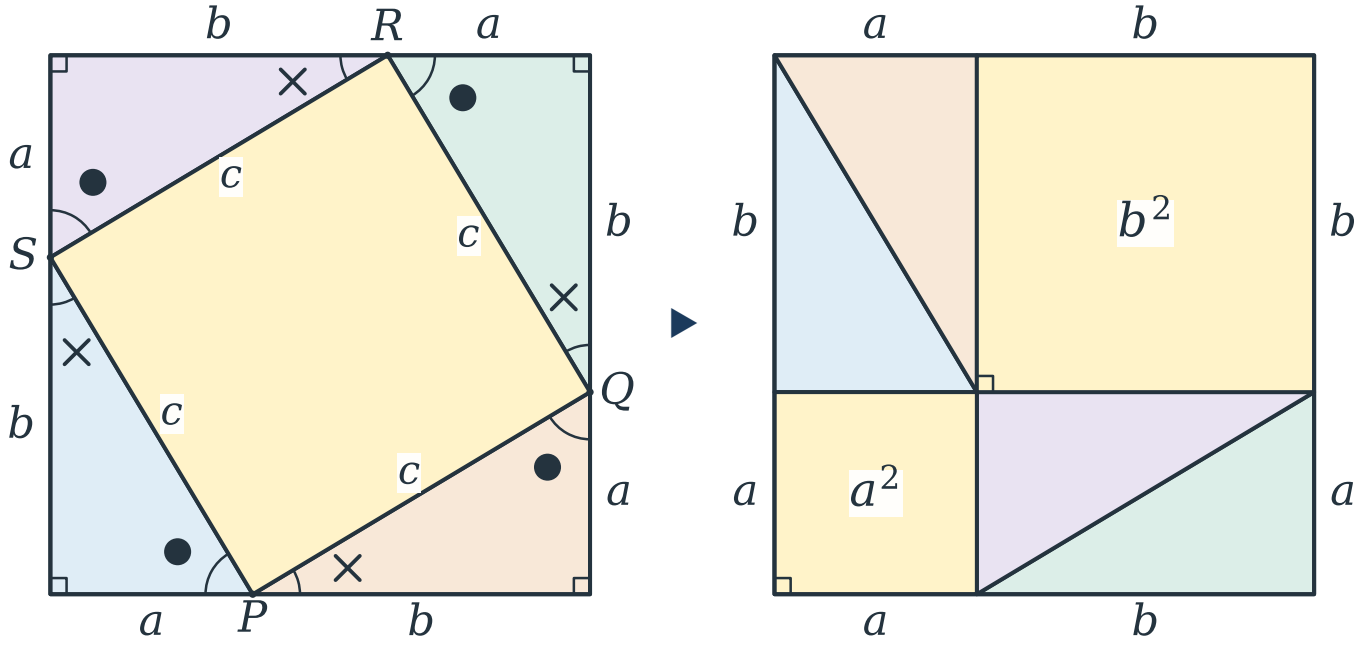
합동인 직각삼각형을 4개씩 배열	→	각 삼각형의 두 직각을 낀 변은 a, b이고 빗변은 c이다.
목표	→	**a^2, b^2, c^2를 각각 정사각형의 넓이로 나타낸다.**

Q 왜 정사각형 두 개를 비교할까?

A 바깥 정사각형의 크기와 그 안에 넣는 네 삼각형의 크기가 각각 같다면, 남는 부분의 넓이도 같다. 한쪽에는 c^2가, 다른 쪽에는 $a^2 + b^2$가 남도록 배열한다.

증명 흐름

1. 같은 정사각형에 네 삼각형씩 두 가지로 배열 ▶
2. 남은 정사각형의 넓이는 c^2와 $a^2 + b^2$ ▶
3. 같은 넓이에서 같은 넓이를 뺀다 ▶
4. $c^2 = a^2 + b^2$



증명	식(주장)	근거
01	주어진 직각삼각형의 두 예각을 •, ×로 표시한다. $\angle\bullet + \angle\times = 90°$	직각삼각형의 두 예각의 크기의 합은 90°이다. $\angle\bullet$, $\angle\times$는 각 표시가 붙은 각의 크기를 뜻한다.
02	바깥 정사각형의 한 변: $a + b$ 네 모서리에 합동인 직각삼각형을 하나씩 배열	네 삼각형의 직각을 바깥 정사각형의 네 모서리에 맞춘다. 각 바깥 변은 길이가 a인 선분과 b인 선분으로 나뉜다.

증명	식(주장)	근거
03	$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = c$	가운데 사각형의 네 변은 각각 합동인 직각삼각형의 빗변이다.
04	가운데 사각형의 각 내각 $= 180° - (\angle\bullet + \angle\times) = 90°$ **$\therefore$ PQRS는 정사각형** **$\therefore$ PQRS의 넓이 $= c^2$**	P, Q, R, S에서 가운데 내각과 양옆의 •, × 각이 평각을 이룬다. 네 변의 길이가 같고 네 내각이 모두 직각이다.
05	둘째 배열에서 남은 넓이 $= a^2 + b^2$	같은 크기의 바깥 정사각형 안에 네 삼각형을 두 직사각형에 두 개씩 배열한다. 각 직사각형의 가로와 세로는 a, b이다. 남은 두 정사각형의 한 변은 각각 a, b이다.
06	**$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2$**	바깥 정사각형의 넓이도 같고 빼는 네 삼각형의 넓이도 같으므로 남은 넓이가 같다.

Q 가운데 사각형의 네 변이 c이면 정사각형이라고 해도 될까?

A 네 변이 같다는 것만으로는 마름모까지만 알 수 있다. 정사각형임을 보이려면 내각이 직각이라는 근거가 더 필요하다. 여기서는 $\angle\bullet + \angle\times = 90°$를 사용했다.

막히기 쉬운 지점

✗ 가운데 사각형의 네 변의 길이가 c이므로 바로 정사각형이다.

✓ **네 변이 같다는 사실만으로는 마름모까지만 알 수 있다. $\angle\bullet + \angle\times = 90°$를 이용해 각 내각이 직각임을 더 보여야 한다.**

증명 기록의 답 예

배열한 두 도형의 스케치	첫 배열: 네 삼각형을 네 모서리에 놓는다. 둘째 배열: 두 직사각형에 두 개씩 놓고 한 변이 a, b인 정사각형 두 개를 남긴다.
남은 도형이 정사각형인 이유	첫 배열의 가운데 사각형은 네 변이 c이고 각 내각이 $180° - (\angle\bullet + \angle\times) = 90°$이다. 둘째 배열에서는 가로와 세로가 모두 a인 정사각형 하나와, 가로와 세로가 모두 b인 정사각형 하나가 남는다.
넓이 비교와 결론	같은 바깥 넓이에서 같은 네 삼각형의 넓이를 빼면 $c^2 = a^2 + b^2$이다.