중3-1 수학 · 01 심화 | Ⅰ. 실수와 그 계산

근호를 없애려면 무엇을 확인할까?

심화편

차례

1	심화 먼저 풀어 보기	2
2	심화 풀이와 이유	6
3	전체 조건 개념 지도	20
4	바꿔 풀기	24
5	막혔을 때 다시 연결하기	25
6	마무리 복습	28
7	정답과 해설	31

심화 4 · 바꿔 풀기 2 · 생각 질문 2 · 빈칸 구조도 6 · 조건 채우기 12 · 정리 문항 1(상황 2개)

© 대치동 재우쌤 | 010-9524-4849 | https://leessaem.com/ | https://blog.naver.com/leessaem84

본 자료는 직접 제작한 학습 자료입니다. 개인 학습을 위한 열람·인쇄는 자유롭게 할 수 있으며, 무단 복제·재배포·수정 후 재배포 및 상업적 이용을 금합니다.

1 심화 먼저 풀어 보기

심화 1 정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{25-x} = 5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

심화 2 자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

생각 질문 1

비교할 문제

심화 1

정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{25-x} = 5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

심화 2

자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

(1) 두 문제에서 각각 먼저 계산한 근호는 무엇이고, 그 근호로 값을 얻었는지 후보의 꼴을 얻었는지 쓰시오.

(2) 앞의 판단을 마친 뒤 마지막으로 버리는 후보와 그 까닭을 비교하시오.

심화 3 자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

심화 4 정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

생각 질문 2

비교할 문제

심화 3

자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

심화 4

정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

(1) 두 문제 모두 처음에 $\frac{72}{x}$ 또는 $\frac{24}{x}$에서 어떤 조건으로 x 후보를 만드는지 쓰시오.

(2) 남은 후보를 결정할 때 심화 3과 4가 각각 추가로 검사하는 조건을 쓰시오.

2 심화 풀이와 이유

빈칸 구조도 **심화 1 — 어떤 순서로 연결할까**

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ◯표 하시오.

정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{25-x} = 5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

심화 1

주어진 것

$-3 \le a \le -1$, 두 근호의 합이 5

구할 것

순서쌍 (a, x) 모두

① $a = -3, -2, -1$일 때 $\sqrt{(a+1)^2}$의 값

_____ , _____ , _____

② 그때 $\sqrt{25-x}$의 값

_____ , _____ , _____

③ 그때 x의 값

_____ , _____ , _____

④ 버리는 경우

$a =$ _____ , 까닭: x가 (자연수가 아니다 / 정수가 아니다)

⑤ 순서쌍 (a, x)

(_____ , _____), (_____ , _____)

이 문제의 갈림길 값이 바로 정해지는 (앞의 근호 / 뒤의 근호)부터 계산했고, 마지막에 (자연수 조건 / 부호 조건)으로 하나를 버렸다.

심화 1 다시 보기

절댓값으로 바꾼 뒤 남은 근호의 값 정하기

함께 나온 조건 두 근호의 합이 정해져 있다 ⇒ **떠올린 개념** 절댓값으로 바꾸기
→ 두 근호 차례로 거르기

문제 정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{25-x}=5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이

$a=-3, -2, -1$일 때 $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=2, 1, 0$이다. 따라서 $\sqrt{25-x}=3, 4, 5$이어서 $x=16, 9, 0$이다. 자연수 조건 때문에 $x=0$은 제외한다. 답은 $(-3, 16), (-2, 9)$이다.

방법: 절댓값으로 바꾸기로 $\sqrt{(a+1)^2}$의 값을 먼저 정하고, 두 근호 차례로 거르기로 남은 근호의 값과 x를 정한다.

고른 이유: a의 부호 범위에서 $|a+1|$을 먼저 결정해야 $25-x$가 어떤 제곱수인지 알 수 있다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① $a=-3, -2, -1$일 때 $\sqrt{(a+1)^2}$의 값 → 2, 1, 0

$a+1$은 $-2, -1, 0$이므로 $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$의 값은 차례로 2, 1, 0이에요.

Q $a+1$이 음수일 때도 $a+1$을 그대로 쓸 수 있나요?

그럴 수 없어요. $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$이므로 $a+1<0$이면 부호가 반대인 값 $-(a+1)$로 바꾸어야 해요.

② 그때 $\sqrt{25-x}$의 값 → 3, 4, 5

두 제곱근의 합이 5이므로 두 번째 제곱근은 각각 $5-2=3$, $5-1=4$, $5-0=5$가 돼요.

③ 그때 x의 값 → 16, 9, 0

$25-x=3^2, 4^2, 5^2$에서 $x=25-9=16$, $x=25-16=9$, $x=25-25=0$을 얻어요.

④ 버리는 경우 → $a=-1$, $x=0$이므로 자연수가 아니다

$a=-1$일 때 $x=0$이에요. x는 자연수여야 하므로 이 경우를 제외해요.

Q $a=-1$도 범위에 있는데 왜 버리나요?

$a=-1$에서는 $\sqrt{25-x}=5$이므로 $x=0$이에요. 문제에서 x를 자연수라고 정했으므로 제외해요.

⑤ 순서쌍 $(a, x) \rightarrow (-3, 16), (-2, 9)$

$a=-3, -2$일 때 각각 $x=16, 9$가 돼요. 둘 다 주어진 범위와 자연수 조건을 만족해요.

핵심 연결 $\sqrt{(a+1)^2}=2, 1, 0$ → $\sqrt{25-x}=3, 4, 5$ → $x=16, 9, 0$ → $x=0$ 제외 → $(-3, 16), (-2, 9)$.

빈칸 구조도 심화 2 — 어떤 순서로 연결할까

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

심화 2

주어진 것

x는 자연수

구할 것

$\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 모두 자연수인 x

① $\sqrt{24x}$에서 짝이 없는 소인수

_____ , _____

② 그래서 x는 6 ×

(제곱수 / 짝수)

③ x의 범위를 정해 주는 조건

$x <$ _____

④ 두 조건을 함께 만족하는 후보

_____ , _____

⑤ $40-x$가 제곱수인 것

$x =$ _____

이 문제의 갈림길 곱의 꼴만으로는 후보가 (끝없이 많았고 / 몇 개뿐이었고), 빼는 꼴의 근호가 후보를 (몇 개로 줄였다 / 늘렸다).

심화 2 다시 보기

곱의 조건으로 후보의 꼴을 얻고 빨셈으로 좁히기

함께 나온 조건 두 근호가 모두 자연수다 ⇒ **떠올린 개념** 짝 없는 소인수 채우기
→ 두 근호 차례로 거르기

문제 자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이

$24x$가 제곱수가 되려면 $x=6k^2$(k는 자연수)이다. 한편 $\sqrt{40-x}$가 자연수이므로 $x<40$이다.
따라서 $x=6, 24$만 가능하고, $40-6=34$는 제곱수가 아니지만 $40-24=16=4^2$은 제곱수다.
답은 $x=24$이다.

방법: 짝 없는 소인수 채우기로 후보의 꼴 $x=6k^2$을 정한 뒤, 두 근호 차례로 거르기로 $\sqrt{40-x}$를 확인한다.
고른 이유: $24x$에서는 x의 후보를 $6k^2$ 꼴로 먼저 정하고, $40-x$가 양의 제곱수인지를 확인할 수 있다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① $\sqrt{24x}$에서 짝이 없는 소인수 → 2, 3

$24=2^3\times 3$에서 소인수 2 한 개와 3 한 개가 짝 없이 남아요. x로 두 짝을 채워야 해요.

② 그래서 x는 6 × → 제곱수

먼저 $2\times 3=6$을 채우고, 나머지 소인수도 짝수가 되게 하려면 양의 제곱수를 곱해야 해요.
따라서 $x=6k^2$(k는 자연수)예요.

③ x의 범위를 정해 주는 조건 → $x<40$

$\sqrt{40-x}$가 자연수라면 $40-x$는 양의 제곱수여야 해요. 따라서 자연수 x는 40보다 작아요.

비유 체 두 개로 거르기

첫 체 $\sqrt{24x}$는 $6, 24, 54, 96, \cdots$처럼 끝없이 통과시켜요. 둘째 체 $\sqrt{40-x}$는 40 이상인 수를 하나도 통과시키지 않으므로, 끝없던 후보 가운데 몇 개만 살펴보면 돼요.

④ 두 조건을 함께 만족하는 후보 → 6, 24

$x = 6k^2 < 40$이므로 $k = 1, 2$만 가능해요. $k = 3$이면 $x = 54$가 되어 범위를 벗어나요.

Q 왜 $x = 6, 24$만 확인하나요?

곱의 조건에서 $x = 6k^2$이고 다른 근호의 조건에서 $x < 40$이에요. 이 두 조건을 합치면 $k = 1, 2$만 가능해요.

⑤ $40 - x$가 제곱수인 것 → $x = 24$

$x = 6$이면 $40 - x = 34$로 제곱수가 아니에요. $x = 24$이면 $40 - x = 16 = 4^2$이므로 답은 24예요.

Q $x = 6$이면 첫 번째 근호가 자연수인데도 답이 아닌가요?

두 근호가 **모두** 자연수여야 해요. $x = 6$일 때 $\sqrt{40 - 6} = \sqrt{34}$는 자연수가 아니므로 제외해요.

다른 풀이

$\sqrt{40 - x}$부터 확인해도 된다. $40 - x = 1, 4, 9, 16, 25, 36$에서 $x = 39, 36, 31, 24, 15, 4$를 얻는다. 이 여섯 수 중 $24x$가 제곱수가 되는 것은 $x = 24$뿐이다. 따라서 답은 24이다. 두 풀이 모두 맞다. 빼는 꼴부터 계산하면 후보 6개를 검사하고, 곱의 꼴 $x = 6k^2$에 $x < 40$을 함께 쓰면 후보 2개만 검사한다.

핵심 연결 $24x$가 제곱수 → $x = 6k^2$ → $x < 40$ → 후보 6, 24 → $40 - x$가 제곱수인 $x = 24$.

빈칸 구조도 **심화 1·2 모아 보기 — 두 문제는 어디가 같고 어디가 다를까**

두 문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

두 문제 모두 근호가 두 개이다.

심화 1

정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{25-x}=5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

심화 2

자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

① 먼저 계산한 근호의 꼴

심화 1	심화 2
(제곱이 들어 있는 꼴 / 곱의 꼴)	(제곱이 들어 있는 꼴 / 곱의 꼴)

▼

② 첫 근호로 얻은 것

심화 1	심화 2
(값 / 후보의 꼴)	(값 / 후보의 꼴)

▼

③ 두 번째 근호의 꼴

심화 1	심화 2
(빼는 꼴 / 곱의 꼴)	(빼는 꼴 / 곱의 꼴)

▼

④ 마지막에 버린 x

심화 1	심화 2
_____	_____

두 문제를 비교하면 먼저 계산한 근호는 두 문제가 (같다 / 다르다). 하지만 '첫 근호로 후보 → 둘째 근호로 거르기'의 순서는 (같다 / 다르다).

빈칸 구조도 심화 3 — 어떤 순서로 연결할까

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ◯표 하시오.

자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

심화 3

주어진 것

x는 자연수

구할 것

$\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 모두 자연수인 x

① 72의 약수 가운데 제곱수

_____ , _____ , _____ , _____

② 그래서 x의 후보

_____ , _____ , _____ , _____

③ $\sqrt{34-x}$ 때문에 바로 버리는 후보

$x=$ _____

④ $34-x$가 제곱수가 되는 후보

$x=$ _____ 일 때 $34-x=$ _____

⑤ 답

$x=$ _____

이 문제의 갈림길 나누는 꼴은 후보가 (몇 개뿐이어서 / 끝없이 많아서) 하나씩 (확인할 수 있었다 / 확인할 수 없었다).

심화 3 다시 보기

제곱수 약수로 후보를 만든 뒤 두 번째 근호로 거르기

함께 나온 조건 두 근호가 모두 자연수다 ⇒ **떠올린 개념** 제곱수 약수 찾기
→ 두 근호 차례로 거르기

문제 자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.
또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이

$\frac{72}{x}=m^2$이면 m^2은 72의 제곱수 약수 1, 4, 9, 36 중 하나이다. 이때 $x=72, 18, 8, 2$이다.
$\sqrt{34-x}$도 자연수여야 하므로 $x=72$는 제외하고, 나머지에서 $34-x$가 제곱수인 경우는 $x=18$뿐이다. 따라서 답은 18이다.

방법: 제곱수 약수 찾기로 x를 몇 개로 좁힌 뒤, 두 근호 차례로 거르기로 $\sqrt{34-x}$를 확인한다.
고른 이유: $\frac{72}{x}$가 자연수 제곱이 되려면 x는 72를 제곱수로 나눈 값 중 자연수여야 한다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① 72의 약수 가운데 제곱수 → 1, 4, 9, 36

$\frac{72}{x}$가 양의 제곱수여야 하므로 72의 약수 가운데 제곱수 1, 4, 9, 36을 찾아요.

Q 72의 약수를 모두 살펴봐야 하나요?

$\frac{72}{x}$가 양의 제곱수여야 하므로 제곱수인 약수 1, 4, 9, 36만 확인하면 돼요.

② 그래서 x의 후보 → 72, 18, 8, 2

$\frac{72}{x}=1, 4, 9, 36$에서 $x=72, 18, 8, 2$예요. 모두 자연수여서 첫 조건을 만족해요.

③ $\sqrt{34-x}$ 때문에 바로 버리는 후보 → 72

$x=72$이면 $34-x=-38$로 근호 안이 음수가 돼요. 음수의 제곱근은 없으므로 이 경우를 제외해요.

Q $x=72$는 첫 근호에서 가능했는데 왜 버리나요?

$34-72=-38$이어서 두 번째 근호 안이 음수가 돼요. 따라서 두 제곱근을 모두 자연수로 만들 수 없어요.

④ $34-x$가 제곱수가 되는 후보 → $x=18$일 때 $34-x=16$

남은 $x=18, 8, 2$에서는 $34-x=16, 26, 32$예요. 양의 제곱수는 16 하나예요.

⑤ 답 → $x=18$

$x=18$이면 $\frac{72}{18}=4$이고 $34-18=16$이에요. 두 제곱근은 각각 2, 4로 모두 자연수예요.

핵심 연결 $\frac{72}{x}=1, 4, 9, 36$ → 후보 $x=72, 18, 8, 2$ → $34-x>0$ → $34-x$가 제곱수인 $x=18$.

빈칸 구조도 심화 4 — 어떤 순서로 연결할까

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

심화 4

주어진 것

$-6 \le a \le -3$, 두 근호의 곱이 6

구할 것

순서쌍 (a, x) 모두

① $\sqrt{\frac{24}{x}}$가 자연수가 되는 x

_____ , _____

② 그때 $\sqrt{\frac{24}{x}}$의 값

_____ , _____

③ $a < 0$일 때 $\sqrt{a^2}$은 a와

(부호가 반대인 수 / 같은 수)

④ $\sqrt{a^2}$의 값

$x = 6$일 때 _____ , $x = 24$일 때 _____

⑤ 순서쌍 (a, x)

(_____ , _____), (_____ , _____)

이 문제의 갈림길 먼저 계산한 근호는 (나누는 꼴 / 제곱이 들어 있는 꼴)이고, $\sqrt{a^2}$에서 a를 정할 때 (부호 / 자릿수)를 확인했다.

심화 4 다시 보기

나누는 꼴로 후보를 정하고 음수의 부호 처리하기

함께 나온 조건 두 근호의 곱이 정해져 있다 ⇒ **떠올린 개념** 제곱수 약수 찾기
→ 절댓값으로 바꾸기

문제 정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이

$\sqrt{\frac{24}{x}}$가 자연수이면 $\frac{24}{x} = 1$ 또는 4이므로 $x = 24$ 또는 6이다. $x = 6$일 때 $\sqrt{\frac{24}{x}} = 2$이므로 $\sqrt{a^2} = 3$, $a = -3$이다. $x = 24$일 때 $\sqrt{\frac{24}{x}} = 1$이므로 $\sqrt{a^2} = 6$, $a = -6$이다. 따라서 답은 $(-3, 6), (-6, 24)$이다.

방법: 먼저 제곱수 약수 찾기로 x의 후보를 구한 뒤, 절댓값으로 바꾸기로 a의 음수 범위를 처리한다.

고른 이유: $\frac{24}{x}$가 양의 제곱수인 x는 6, 24이고, $a < 0$이므로 $\sqrt{a^2} = -a$가 된다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① $\sqrt{\frac{24}{x}}$가 자연수가 되는 x → 6, 24

$\frac{24}{x}$가 제곱수여야 하므로 24의 제곱수 약수 1, 4를 찾아요. 따라서 $x = 24, 6$이에요.

Q $x = 1$부터 대입하지 않는 까닭은 무엇인가요?

$\frac{24}{x}$가 양의 제곱수라는 조건으로 후보가 $x = 6, 24$로 바로 좁혀져요. 나머지 자연수는 살펴볼 필요가 없어요.

② 그때 $\sqrt{\frac{24}{x}}$의 값 → 2, 1

$x = 6$이면 $\frac{24}{x} = 4$이어서 제곱근은 2예요. $x = 24$이면 몫이 1이어서 제곱근도 1이에요.

③ $a < 0$일 때 $\sqrt{a^2}$은 a와 → 부호가 반대인 수

a는 주어진 범위에서 항상 음수예요. 따라서 $\sqrt{a^2} = |a| = -a$로 바꾸어야 해요.

Q $\sqrt{a^2}=a$라고 쓰면 무엇이 잘못되나요?

a는 음수인데 제곱근의 값은 음수가 아니에요. $\sqrt{a^2}=|a|=-a$를 써야 해요.

④ $\sqrt{a^2}$의 값 → $x=6$일 때 3, $x=24$일 때 6

두 근호의 곱은 6이에요. $x=6$일 때 $\sqrt{\frac{24}{x}}=2$이므로 $\sqrt{a^2}=3$, $x=24$일 때 $\sqrt{\frac{24}{x}}=1$이므로 $\sqrt{a^2}=6$이어야 해요.

⑤ 순서쌍 (a, x) → $(-3, 6), (-6, 24)$

$a<0$이므로 절댓값이 3, 6일 때 $a=-3, -6$이에요. 두 수 모두 주어진 $-6 \le a \le -3$ 범위에 있어요.

핵심 연결 $\frac{24}{x}=4, 1$ → $x=6, 24$ → $\sqrt{a^2}=3, 6$ → $a=-3, -6$ → $(-3, 6), (-6, 24)$.

빈칸 구조도 심화 3·4 모아 보기 — 첫 단계와 거르는 근호는 같을까

두 문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

두 문제 모두 한 근호로 x의 후보를 먼저 만든다.

심화 3

자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

심화 4

정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

① 먼저 계산한 근호의 꼴

심화 3: (나누는 꼴 / 빼는 꼴)

심화 4: (나누는 꼴 / 빼는 꼴)

▼

② 첫 근호로 얻은 x의 후보

심화 3: _____

심화 4: _____

▼

③ 후보를 거른 근호의 꼴

심화 3: (빼는 꼴 / 제곱이 들어 있는 꼴)

심화 4: (빼는 꼴 / 제곱이 들어 있는 꼴)

▼

④ 답

심화 3: _____

심화 4: _____

두 문제를 비교하면 두 문제는 첫 단계가 (같다 / 다르다). 후보를 거른 근호는 (같다 / 다르다).

3 전체 조건 개념 지도

도구 1 절댓값으로 바꾸기

무엇을 확인할까?

1. 식이 제곱된 꼴인가?
2. 제곱되기 전의 식은 음수일 수 있는가?

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

주의 $A < 0$이면 $|A| = -A$예요. 제곱근의 값은 음수가 아니고 $\sqrt{0} = 0$은 자연수가 아니에요.

도구 2 제곱수 늘어놓기

무엇을 확인할까?

1. x가 더해지거나 빠지는 꼴인가?
2. 가능한 양의 제곱수는 어떤 것인가?

$$A \pm x = m^2 (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

주의 $\sqrt{A - x}$에서는 A보다 작은 제곱수를, $\sqrt{A + x}$에서는 A보다 큰 제곱수를 확인해요.
제곱근이 자연수여야 하면 $m = 0$은 빼요.

도구 3 짝 없는 소인수 채우기

무엇을 확인할까?

1. x가 근호 안에서 곱해져 있는가?
2. 짝이 맞지 않은 소인수는 무엇인가?

$$Ax = m^2 (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

주의 근호 안의 곱이 제곱수가 되려면 모든 소인수의 지수가 짝수여야 해요. x의 **가장 작은 값**을 묻는다면 부족한 소인수만 채워요.

도구 4 제곱수 약수 찾기

무엇을 확인할까?

1. x가 분모에 있는가?
2. A의 약수 중 제곱수는 무엇인가?

$$\frac{A}{x} = m^2 \text{ 이면 } x = \frac{A}{m^2}$$

주의 A, x가 자연수이고 몫이 자연수의 제곱이면 m^2은 A의 약수예요. 몫이 A의 약수 가운데 **제곱수**일 때만 답이 돼요.

도구 5 두 근호 차례로 거르기

무엇을 확인할까?

1. 근호가 두 개이고, 각각 자연수여야 하거나 두 근호의 합이 정해져 있는가?
2. 각 근호가 주는 것은 값인가, 후보의 꼴인가, 범위인가?

첫 근호 → 후보(값 또는 꼴) → 둘째 근호로 거르기

주의 곱의 꼴만으로는 x가 끝없이 많다. 빼는 꼴 근호가 범위($x < A$)를 막아 준다.

전체 조건 개념 지도

근호를 없애야 하면

근호 안에 x가 어떻게 들어 있는가? 함께 나온 조건은 무엇인가?

① $\sqrt{(a+1)^2}$

함께 나온 조건 **근호 안이 제곱된 식이다**

→ 절댓값으로 바꾸기

$\sqrt{A^2} = |A|$, $A < 0$이면 $-A$. $\sqrt{0} = 0$은 올바른 값이고, 그 제곱근이 자연수여야 할 때만 0을 뺀다

심화 1 | 심화 4

② $\sqrt{A - x}$

함께 나온 조건 **근호 안에서 x를 빼거나 더한다**

→ 제곱수 늘어놓기

빼면 A보다 작은 양의 제곱수, 더하면 A보다 큰 제곱수를 늘어놓고 x를 거꾸로 구한다

심화 2 다른 풀이

③ $\sqrt{Ax}$

함께 나온 조건 **근호 안에서 x를 곱한다**

→ 짝 없는 소인수 채우기

소인수의 지수가 모두 짝수여야 한다. 모든 x = (짝 없는 소인수의 곱) × 제곱수

심화 2

④ $\sqrt{\frac{A}{x}}$

함께 나온 조건 **근호 안에서 x로 나눈다**

→ 제곱수 약수 찾기

$\frac{A}{x} = m^2$이면 $x = \frac{A}{m^2}$이고, m^2은 A의 약수 가운데 제곱수다

심화 3 | 심화 4

⑤ $\sqrt{24x}$, $\sqrt{40 - x}$

함께 나온 조건 **근호가 두 개이고 둘 다 정해진 조건을 만족해야 한다**

→ 두 근호 차례로 거르기

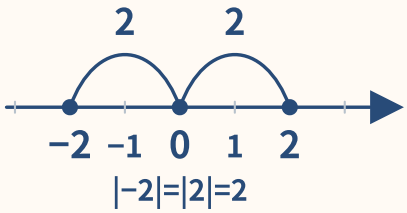
각 근호가 주는 값·후보의 꼴·범위를 함께 써서 검사할 후보를 줄이고, 남은 후보를 다른 근호로 거른다. 곱의 꼴은 후보가 끝없으므로 빼는 꼴의 범위 $x < A$가 막아 준다

심화 1 | 심화 2 | 심화 3

비유 **수직선에서 0까지의 거리**

-2에서 0까지의 거리와 2에서 0까지의 거리는 둘 다 2예요. 그래서 $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$이고, $\sqrt{A^2}=|A|$이에요.

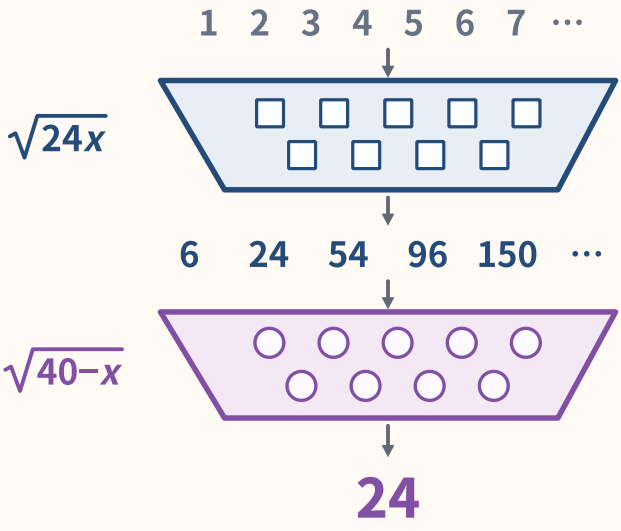
⚠ **비유의 한계:** 수직선 거리는 **제곱되어 있는 식**을 절댓값으로 바꾸는 까닭만 설명해요. 모든 근호에서 부호를 없애도 된다는 뜻은 아니에요.



비유 **체 두 개로 거르기**

구멍 모양이 다른 체 두 개가 있어요. 첫 체를 통과한 수만 둘째 체에 올려요. 둘 다 통과한 수만 답이에요.

⚠ **비유의 한계:** 체의 순서를 바꿔도 마지막에 남는 수는 같아요. 다만 먼저 쓴 체에서 끝없이 많은 수가 나오면, 다른 체가 막아 주는 범위를 함께 써야 검사를 끝낼 수 있어요.



답이 안 나오면

먼저 어느 근호가 **값**을 바로 주는지, 어느 근호가 **후보의 꼴**이나 **몇 개 안 되는 후보**를 주는지 살펴봐요. 그런 다음 다른 근호로 다시 걸러요. 마지막에는 문제가 무엇을 자연수로 정했는지 구분해 확인해요. 제곱근이 자연수여야 하면 근호 안이 0인 후보를 빼고, x처럼 구하는 수가 자연수여야 하면 $x=0$ 같은 값을 빼요. $\sqrt{0}=0$ 자체는 올바른 값이에요.

4 바꿔 풀기

바꿔 풀기 1 자연수 x에 대하여 $\sqrt{16x}$와 $\sqrt{40-x}$가 모두 자연수가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

바꿔 풀기 2 자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{27-x}$가 모두 자연수가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

5 막혔을 때 다시 연결하기

심화 1 먼저 막힌 곳부터 확인

문제 정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{25-x}=5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

막힌 곳

$\sqrt{(a+1)^2}=a+1$이라고 쓰고 $a=-3$을 대입하면 $-2+\sqrt{25-x}=5$, 곧 $\sqrt{25-x}=7$이 나온다. 그러면 $x=-24$여서 자연수 조건과 맞지 않아 멈춘다.

▼

새로 연결한 뒤

$\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$이다.

까닭 $a=-3, -2, -1$에서 첫 제곱근의 값은 $2, 1, 0$이므로 뒤의 근호를 $3, 4, 5$로 놓을 수 있다. $x=16, 9, 0$ 중 자연수가 아닌 0을 버린다.

심화 2 먼저 막힌 곳부터 확인

문제 자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

막힌 곳

$\sqrt{24x}$만 보고 $x=6, 24, 54, 96, \cdots$를 적는다. 이 후보가 끝없이 이어지므로 어느 것까지 검사할지 정하지 못해 멈춘다.

▼

새로 연결한 뒤

$\sqrt{40-x}$도 자연수여야 하므로 $x<40$이다.

까닭 따라서 $x=6k^2$ 중 $6, 24$만 남고, $40-x$를 확인하면 $x=24$만 가능하다.

심화 3 먼저 막힌 곳부터 확인

문제 자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

막힌 곳

$\sqrt{\frac{72}{x}}$만 처리하여 $x=2, 8, 18, 72$를 전부 답이라고 적는다. 두 번째 근호의 조건을 확인하지 않은 채 답을 쓴 것이다.

▼

새로 연결한 뒤

$34-x$도 양의 제곱수여야 한다.

까닭 $x=72$에서는 근호 안이 음수이고, 나머지 $2, 8, 18$에서는 $34-x=32, 26, 16$이므로 $x=18$만 가능하다.

심화 4 먼저 막힌 곳부터 확인

문제 정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

막힌 곳

$\sqrt{a^2}=a$라고 쓰고 $x=6$을 넣으면 $a \times 2 = 6$, 곧 $a=3$이 된다. 이는 주어진 음수 범위에 어긋나 답이 없다고 생각하며 멈춘다.

▼

새로 연결한 뒤

$a<0$이므로 $\sqrt{a^2}=-a$로 바꾼다.

까닭 $x=6, 24$에서 $\sqrt{\frac{24}{x}}$의 값은 각각 $2, 1$이므로 $-a=3, 6$이 되어 $a=-3, -6$을 얻는다.

막힌 곳 한눈에 보기

심화	막힌 곳	새로 연결한 것
1	$\sqrt{(a+1)^2}=a+1$로 처리해 음수 x가 나온다	$\sqrt{(a+1)^2}=\lvert a+1\rvert$
2	$x=6, 24, 54, \cdots$에서 멈추지 못한다	$x<40$으로 후보를 좁힌다
3	$x=2, 8, 18, 72$를 모두 답으로 쓴다	$34-x$가 양의 제곱수인지 재확인한다
4	$\sqrt{a^2}=a$를 써서 양수 a만 나온다	$a<0$이면 $\sqrt{a^2}=-a$

6 마무리 복습

문제 ↔ 개념 한눈에 보기

문제	함께 나온 조건	절댓값으로 바꾸기	제곱수 늘어놓기	짝 없는 소인수 채우기	제곱수 약수 찾기	두 근호 차례로 거르기
심화 1	두 근호의 합이 정해짐	①				②
심화 2	두 근호가 모두 자연수		(②)	①		②
심화 3	두 근호가 모두 자연수				①	②
심화 4	두 근호의 곱이 정해짐	②			①	
바꿔 풀기 1	두 근호가 모두 자연수			①		②
바꿔 풀기 2	두 근호가 모두 자연수				①	②

원 안의 숫자는 그 문제에서 개념을 쓴 순서다. 점선 원은 다른 풀이에서 쓴 개념이다.

조건 채우기

보기 | 절댓값 | 부호 | 음수 | 큰 | 작은 | 제곱수 | 짝수 | 약수 | 채운다 | 덜어 낸다 | 범위 | 후보 | 몇 개뿐인 | 끝없이 많은

1. $\sqrt{(a+1)^2}$은 $a+1$의 _____ 과 같다.

2. $a+1<0$이면 $\sqrt{(a+1)^2}$은 $a+1$과 _____ 가 반대인 수이다.

3. 근호 안이 $A-x$ 꼴이면 A보다 _____ 양의 제곱수를 늘어놓고 x를 거꾸로 구한다.

4. 근호 안이 $A+x$ 꼴이면 A보다 _____ 제곱수를 늘어놓는다.

5. 근호 안에서 x를 곱하는 꼴이면 짝 없는 소인수를 x로 _____ .

6. $\sqrt{Ax}$가 자연수가 되는 x는 모두 (짝 없는 소인수의 곱) $\times$ (_____) 꼴이다.

7. 근호 안이 $\frac{A}{x}$ 꼴이면 A의 _____ 가운데 제곱수를 먼저 찾는다.

8. 근호 안이 $\frac{A}{x}$ 꼴이면 x는 A에서 짝 없는 소인수를 _____ .

9. $\sqrt{A-x}$가 자연수이면 $x<A$이다. 부등호로 나타낸 이 _____ 덕분에 곱의 꼴에서 끝없던 후보가 몇 개로 준다.

10. 두 근호가 모두 자연수여야 하면 첫 근호에서 나온 x의 _____ 를 두 번째 근호에 하나씩 넣어 확인한다.

11. 빼는 꼴 근호 $\sqrt{A-x}$만 보아도 x의 후보가 _____ 까닭에, 이 근호부터 계산해도 된다.

12. 곱의 꼴 근호만 보면 x의 후보가 _____ 까닭에, 빼는 꼴 근호를 함께 봐야 한다.

정리 문항

다음 두 상황의 물음에 답하시오.

상황 1

자연수 x에 대하여 $\sqrt{10x}$와 $\sqrt{26-x}$가 모두 자연수가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 처음 선택한 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유도 쓰시오.

고를 방법

그 방법을 고른 까닭

정답

상황 2

정수 a가 $-9 \le a \le -5$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{50}{x}}$은 **자연수**이고 $\sqrt{(a+1)^2} \times \sqrt{\frac{50}{x}} = 20$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 처음 선택한 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유도 쓰시오.

고를 방법

그 방법을 고른 까닭

정답

7 정답과 해설

빠른 정답

문항	정답	문항	정답
심화 1	$(a, x) = (-3, 16), (-2, 9)$	**심화 4**	$(a, x) = (-3, 6), (-6, 24)$
심화 2	$x = 24$	**바꿔 풀기 1**	$x = 4, 36$
심화 3	$x = 18$	**바꿔 풀기 2**	$x = 2, 18$

빈칸 구조도 정답

빈칸 구조도 정답 **심화 1**

심화 1 두 근호의 합이 정해져 있다 ⇒ 떠올린 개념 절댓값으로 바꾸기
→ 두 근호 차례로 거르기

정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{25-x} = 5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

심화 1

주어진 것

$-3 \le a \le -1$, 두 근호의 합이 5

구할 것

순서쌍 (a, x) 모두

① $a = -3, -2, -1$일 때 $\sqrt{(a+1)^2}$의 값

2 , 1 , 0

② 그때 $\sqrt{25-x}$의 값

3 , 4 , 5

③ 그때 x의 값

16 , 9 , 0

④ 버리는 경우

$a =$ −1 , 까닭: x가 (자연수가 아니다 / 정수가 아니다)

⑤ 순서쌍 (a, x)

(−3 , 16), (−2 , 9)

이 문제의 갈림길 값이 바로 정해지는 (앞의 근호 / 뒤의 근호)부터 계산했고, 마지막에 (자연수 조건 / 부호 조건)으로 하나를 버렸다.

심화 2 두 근호가 모두 자연수다 ⇒ 떠올린 개념 짝 없는 소인수 채우기
→ 두 근호 차례로 거르기

자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

심화 2

주어진 것
x는 자연수

구할 것
$\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 모두 자연수인 x

① $\sqrt{24x}$에서 짝이 없는 소인수

2 , 3

② 그래서 x는 6 ×

(제곱수 / 짝수)

③ x의 범위를 정해 주는 조건

$x <$ 40

④ 두 조건을 함께 만족하는 후보

6 , 24

⑤ $40-x$가 제곱수인 것

$x =$ 24

이 문제의 갈림길 곱의 꼴만으로는 후보가 (끝없이 많았고 / 몇 개뿐이었고), 빼는 꼴의 근호가 후보를 (몇 개로 줄였다 / 늘렸다).

빈칸 구조도 정답 심화 1·2 모아 보기

두 문제 모두 근호가 두 개이다.

심화 1

정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{25-x}=5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

① 먼저 계산한 근호의 꼴

(**제곱이 들어 있는 꼴** / 곱의 꼴)

▼

② 첫 근호로 얻은 것

(**값** / 후보의 꼴)

▼

③ 두 번째 근호의 꼴

(**빼는 꼴** / 곱의 꼴)

▼

④ 마지막에 버린 x

0

심화 2

자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

① 먼저 계산한 근호의 꼴

(제곱이 들어 있는 꼴 / **곱의 꼴**)

▼

② 첫 근호로 얻은 것

(값 / **후보의 꼴**)

▼

③ 두 번째 근호의 꼴

(**빼는 꼴** / 곱의 꼴)

▼

④ 마지막에 버린 x

6

두 문제를 비교하면 먼저 계산한 근호는 두 문제가 (같다 / **다르다**). 하지만 '첫 근호로 후보 → 둘째 근호로 거르기'의 순서는 (**같다** / 다르다).

비교 정리

심화 1에서는 제곱된 식의 **값**을 먼저 구하고, 심화 2에서는 곱의 조건으로 후보의 **꼴**을 먼저 정해요. 첫 조건에서 얻은 결과를 뒤의 빼는 꼴 근호로 검사한다는 점은 같아요.

심화 3 두 근호가 모두 자연수다 ⇒ 떠올린 개념 제곱수 약수 찾기
→ 두 근호 차례로 거르기

자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

심화 3

주어진 것

x는 자연수

구할 것

$\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 모두 자연수인 x

① 72의 약수 가운데 제곱수

1 , 4 , 9 , 36

② 그래서 x의 후보

72 , 18 , 8 , 2

③ $\sqrt{34-x}$ 때문에 바로 버리는 후보

$x=$ 72

④ $34-x$가 제곱수가 되는 후보

$x=$ 18 일 때 $34-x=$ 16

⑤ 답

$x=$ 18

이 문제의 갈림길 나누는 꼴은 후보가 (몇 개뿐이어서 / 끝없이 많아서) 하나씩 (확인할 수 있었다 / 확인할 수 없었다).

심화 4 두 근호의 곱이 정해져 있다 ⇒ 떠올린 개념 제곱수 약수 찾기
→ 절댓값으로 바꾸기

정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

심화 4

주어진 것
$-6 \le a \le -3$, 두 근호의 곱이 6

구할 것
순서쌍 (a, x) 모두

① $\sqrt{\frac{24}{x}}$가 자연수가 되는 x

6 , 24

② 그때 $\sqrt{\frac{24}{x}}$의 값

2 , 1

③ $a<0$일 때 $\sqrt{a^2}$은 a와
(부호가 반대인 수 / 같은 수)

④ $\sqrt{a^2}$의 값

$x=6$일 때 3 , $x=24$일 때 6

⑤ 순서쌍 (a, x)

(−3 , 6), (−6 , 24)

이 문제의 갈림길 먼저 계산한 근호는 (나누는 꼴 / 제곱이 들어 있는 꼴)이고, $\sqrt{a^2}$에서 a를 정할 때 (부호 / 자릿수)를 확인했다.

빈칸 구조도 정답 심화 3·4 모아 보기

두 문제 모두 한 근호로 x의 후보를 먼저 만든다.

심화 3

자연수 x에 대하여 $\sqrt{\frac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오.

① 먼저 계산한 근호의 꼴

(**나누는 꼴** / 뺀는 꼴)

▼

② 첫 근호로 얻은 x의 후보

$72, 18, 8, 2$

▼

③ 후보를 거른 근호의 꼴

(**뺀는 꼴** / 제곱이 들어 있는 꼴)

▼

④ 답

$x = 18$

심화 4

정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\frac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\frac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오.

① 먼저 계산한 근호의 꼴

(**나누는 꼴** / 뺀는 꼴)

▼

② 첫 근호로 얻은 x의 후보

$6, 24$

▼

③ 후보를 거른 근호의 꼴

(뺀는 꼴 / **제곱이 들어 있는 꼴**)

▼

④ 답

$(-3, 6), (-6, 24)$

두 문제를 비교하면 두 문제는 첫 단계가 (**같다** / 다르다). 후보를 거른 근호는 (같다 / **다르다**).

비교 정리

두 문제 모두 **제곱수 약수 찾기**로 x의 후보를 몇 개로 좁혀요. 심화 3은 $34-x$가 양의 제곱수인지 검사하고, 심화 4는 $a<0$이라는 부호 조건과 곱의 값을 검사해요.

생각 질문 답 예시와 인정 기준

생각 질문 1

비교 문제 A (심화 1): 정수 a가 $-3 \le a \le -1$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{25-x} = 5$를 만족하는 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

비교 문제 B (심화 2): 자연수 x에 대하여 $\sqrt{24x}$와 $\sqrt{40-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

질문: (1) 두 문제에서 각각 먼저 계산한 근호는 무엇이고, 그 근호로 **값**을 얻었는지 **후보의 꼴**을 얻었는지 쓰시오.

(2) 앞의 판단을 마친 뒤 마지막으로 버리는 후보와 그 까닭을 비교하시오.

답 예시: (1) 심화 1은 $\sqrt{(a+1)^2}$부터 계산해 값 $2, 1, 0$을 얻는다. 심화 2는 $\sqrt{24x}$로 $x = 6k^2$(자연수 k)라는 후보의 꼴을 얻는다. 심화 2의 후보를 몇 개로 줄여 주는 것은 $\sqrt{40-x}$에서 얻은 $x < 40$ 조건이다. (2) 심화 1은 $a = -1$에서 나온 $x = 0$을 자연수 조건 때문에 버리고, 심화 2는 $x = 6$에서 $\sqrt{34}$가 나오므로 버린다.

인정 기준: 각 문제에서 먼저 계산한 근호를 구별하고, **값 / 후보의 꼴**을 정확히 구분하며, 마지막으로 버린 후보와 이유를 모두 쓰면 인정한다.

생각 질문 2

비교 문제 A (심화 3): 자연수 x에 대하여 $\sqrt{\dfrac{72}{x}}$와 $\sqrt{34-x}$가 **모두 자연수**가 되도록 하는 x를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

비교 문제 B (심화 4): 정수 a가 $-6 \le a \le -3$이고 x는 자연수이다. $\sqrt{\dfrac{24}{x}}$는 **자연수**이고 $\sqrt{a^2} \times \sqrt{\dfrac{24}{x}} = 6$일 때, 순서쌍 (a, x)를 모두 구하시오. 또, 풀이 방법과 그 방법을 고른 이유를 쓰시오.

질문: (1) 두 문제 모두 처음에 $\dfrac{72}{x}$ 또는 $\dfrac{24}{x}$에서 어떤 조건으로 x 후보를 만드는지 쓰시오.

(2) 남은 후보를 결정할 때 심화 3과 4가 각각 추가로 검사하는 조건을 쓰시오.

답 예시: (1) 분모로 나눈 몫이 양의 제곱수여야 하므로 해당 상수의 제곱수 약수를 찾는다. (2) 심화 3은 $34-x$가 양의 제곱수인지, 심화 4는 $a < 0$에서 $\sqrt{a^2} = -a$이고 두 근호의 곱이 6인지 확인한다.

인정 기준: 제곱수 약수 판단과 추가 조건의 차이 두 가지가 드러나면 인정한다.

바꿔 풀기 정답과 해설

바꿔 풀기 1 — $x = 4, 36$

$16 = 2^4$은 이미 소인수의 짝이 맞은 제곱수이므로 $16x$가 제곱수가 되려면 x 자체가 제곱수여야 한다. $40 - x$도 양의 제곱수이므로 $1 \le x < 40$이고, 제곱수인 $x = 1, 4, 9, 16, 25, 36$만 검사한다. $x = 4$일 때 $40 - x = 36$, $x = 36$일 때 $40 - x = 4$가 제곱수이므로 답은 4, 36이다.

바꿔 풀기 2 — $x = 2, 18$

$\frac{72}{x}$가 양의 제곱수가 되는 x는 72, 18, 8, 2이다. $27 - x$가 양의 제곱수가 되어야 하므로 $x < 27$이고, $27 - 18 = 9$, $27 - 2 = 25$만 제곱수다. 따라서 $x = 2, 18$이다.

조건 채우기 정답

1. 절댓값 **2.** 부호 **3.** 작은

4. 큰 **5.** 채운다 **6.** 제곱수

7. 약수 **8.** 덜어 낸다 **9.** 범위

10. 후보 **11.** 몇 개뿐인 **12.** 끝없이 많은

갈래별로 다시 보기

갈래(떠올릴 개념)	조건 채우기 번호와 정답
① **절댓값으로 바꾸기** 근호 안이 제곱된 식이다	1 절댓값 2 부호
② **제곱수 늘어놓기** 근호 안에서 x를 빼거나 더한다	3 작은 4 큰
③ **짝 없는 소인수 채우기** 근호 안에서 x를 곱한다	5 채운다 6 제곱수
④ **제곱수 약수 찾기** 근호 안에서 x로 나눈다	7 약수 8 덜어 낸다
⑤ **두 근호 차례로 거르기** 근호가 두 개이고 둘 다 정해진 조건을 만족해야 한다	9 범위 10 후보 11 몇 개뿐인 12 끝없이 많은

정리 문항 답 예시와 인정 기준

상황 1 정답: $x = 10$

방법: 짝 없는 소인수 채우기 → 두 근호 차례로 거르기 / 고른 이유: $10x$가 제곱수가 되려면 $10 = 2 \times 5$의 짝 없는 소인수 $2, 5$를 먼저 채워야 하므로 $x = 10k^2$ 꼴이 나온다. 또 $\sqrt{26 - x}$가 자연수이려면 $x < 26$이므로 후보는 10 하나만 남는다. 실제로 $26 - 10 = 16 = 4^2$이므로 답은 $x = 10$이다.

상황 2 정답: $(a, x) = (-5, 2)$

방법: 제곱수 약수 찾기 → 절댓값으로 바꾸기 / 고른 이유: $\sqrt{\frac{50}{x}}$이 자연수이므로 $\frac{50}{x}$은 제곱수이다. 그래서 50의 제곱수 약수 $1, 25$를 먼저 본다. 그래서 $x = 50, 2$이고 제곱근은 각각 $1, 5$이다. 곱이 20이 되려면 $\sqrt{(a+1)^2} = 20, 4$ 중 하나여야 하는데, 주어진 범위에서 가능한 것은 $|a+1| = 4$뿐이므로 $a = -5$이다. 따라서 순서쌍은 $(-5, 2)$이다.

인정 기준: 각 상황에서 정답과 함께 처음 선택한 방법, 그 방법을 고른 이유를 모두 쓰면 인정한다. 방법 이름만 적고 이유를 쓰지 않으면 부분 인정만 한다.