중1-1 수학 · 01 심화 | Ⅰ. 소인수분해

소인수의 지수를 어떻게 정할까?

심화편

차례

0	문제에 나오는 낱말	2
1	심화 먼저 풀어 보기	3
2	심화 풀이와 이유	7
3	전체 조건 개념 지도	21
4	바꿔 풀기	24
5	막혔을 때 다시 연결하기	26
6	마무리 복습	30
7	정답과 해설	33

심화 4 · 바꿔 풀기 2 · 생각 질문 2 · 빈칸 구조도 6 · 조건 채우기 12 · 정리 문항 1(상황 2개)

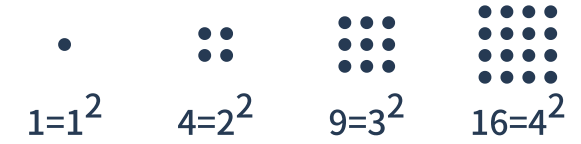
© 대치동 재우쌤 | 010-9524-4849 | https://leessaem.com/ | https://blog.naver.com/leessaem84

본 자료는 직접 제작한 학습 자료입니다. 개인 학습을 위한 열람·인쇄는 자유롭게 할 수 있으며, 무단 복제·재배포·수정 후 재배포 및 상업적 이용을 금합니다.

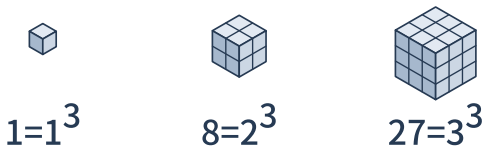
0 문제에 나오는 낱말

제곱수	어떤 자연수의 제곱인 수. 예: $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$, …
세제곱수	어떤 자연수의 세제곱인 수. 예: $1=1^3$, $8=2^3$, $27=3^3$, …
몫	나눗셈에서 나누어 얻은 값. 예: $72 \div 9$의 몫은 8

제곱수



세제곱수



두 자리 자연수	10부터 99까지의 자연수

1 심화 먼저 풀어 보기

심화 1 72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

풀이를 쓰는 칸

심화 2 72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

생각 질문 1

비교할 문제

심화 1

72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

심화 2

72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

(1) 각 문제에서 가장 먼저 소인수분해한 수와 그 결과를 쓰시오.

(2) 72에 곱해 제곱수이면서 세제곱수를 만드는 가장 작은 자연수를 구하고, 곱한 결과를 자연수의 제곱과 세제곱으로 각각 나타내시오. 72와 108에 같은 자연수를 곱해 두 결과를 모두 제곱수로 만들 수 있는지 판단한 까닭은 두 수를 소인수분해한 식을 사용하여 설명하시오.

심화 3 72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

풀이를 쓰는 칸

심화 4 소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

풀이를 쓰는 칸

생각 질문 2

비교할 문제

심화 3

72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

심화 4

소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

(1) 두 문제에서 구해야 하는 자연수가 무엇인지 각각 쓰고, 답 후보를 찾아본 과정을 설명하시오.

(2) 각 문제의 마지막 검사 식을 쓰고, 그 식이 왜 필요한지 설명하시오.

2 심화 풀이와 이유

빈칸 구조도 **심화 1 — 어떤 순서로 연결할까**

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ◯표 하시오.

72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

심화 1

구할 것

곱할 수 있는 가장 작은 자연수

① 72를 소인수분해하면

$72 = 2^{\square} \times 3^{\square}$

② 제곱수이면서 세제곱수가 되려면

같은 소인수를 _____ 개씩 묶을 수 있어야 한다

③ 채울 소인수의 개수

소인수 2를 _____ 개, 3을 _____ 개

④ 곱할 수

$2^{\square} \times 3^{\square} =$ _____

⑤ 검산

72 × (곱할 수) = _____^{2} = _____^{3}

이 문제의 갈림길 두 조건을 함께 만족하려면 (세 개씩 / 여섯 개씩) 묶이게 해야 한다.

심화 1 다시 보기 두 묶음 조건을 한 결과에 함께 맞추기

함께 나온 조건 한 결과가 제곱수이면서 세제곱수 ⇒ 떠올린 개념 지수를 모두 6의 배수로 → 모자라는 소인수 채우기

문제 72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

풀이

$72 = 2^3 \times 3^2$이다. 같은 소인수의 개수가 두 개씩도 세 개씩도 묶여야 하므로 여섯 개씩 묶이도록 해야 한다. 2는 세 개, 3은 네 개를 더 채워야 한다. 곱할 수는 $2^3 \times 3^4 = 8 \times 81 = 648$이다. $72 \times 648 = 46656 = 216^2 = 36^3$이므로 조건을 만족한다.

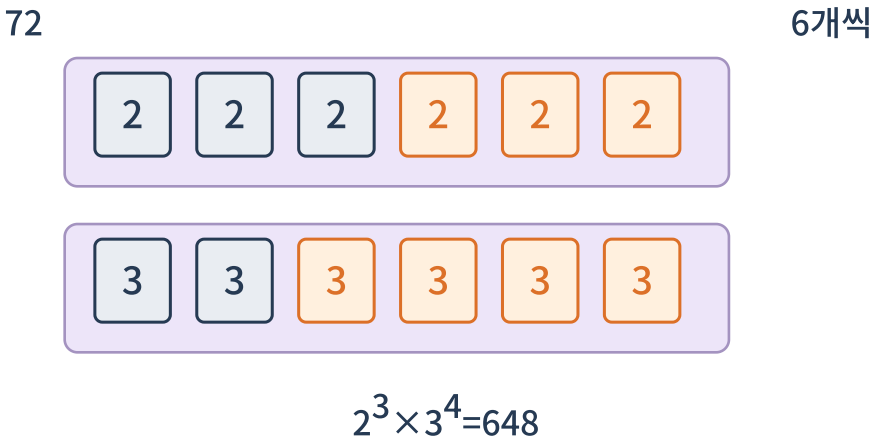
단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① 72를 소인수분해하면 → 3, 2

$72 = 2^3 \times 3^2$이므로 소인수 2는 세 개, 3은 두 개예요. 이 두 개수가 제곱수와 세제곱수 조건을 모두 만족해야 해요.

② 제곱수이면서 세제곱수가 되려면 → 6

같은 소인수를 두 개씩도 세 개씩도 남김없이 묶으려면 그 개수가 2와 3의 공배수여야 해요. 72에는 2와 3이 모두 들어 있으므로 각 개수를 6, 12, 18, … 중에서 골라야 하고, 가장 작게는 여섯 개씩 맞춰요.

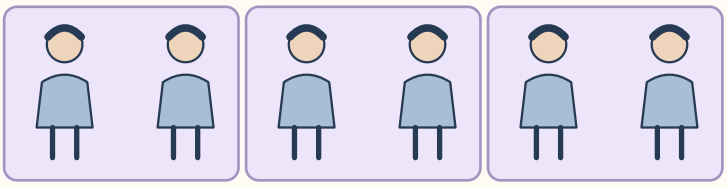


비유 **짝도 모둠도 남김없이**

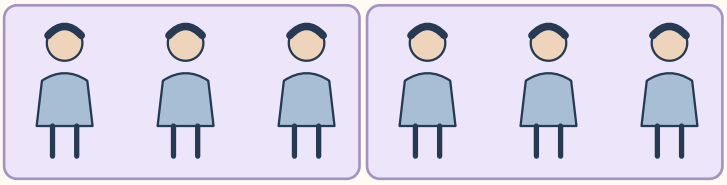
체육 시간에 두 명씩 짝을 지어도, 세 명씩 모둠을 만들어도 남는 사람이 없으려면 사람 수는 6명, 12명, 18명, …이어야 해요. 같은 소인수의 개수도 두 개씩·세 개씩 남김없이 묶이려면 6개, 12개, 18개, …이어야 해요.

⚠ 사람은 한 줄로 세지만 소인수는 종류마다 따로 세어요. 2는 2끼리, 3은 3끼리 묶어요.

2명씩



3명씩



QH1 **제곱수 하나만 만들 때보다 더 많은 수를 곱해야 하는 까닭은 무엇일까?**

제곱수와 세제곱수 두 조건을 모두 만족해야 하므로, 같은 소인수의 개수를 두 개씩도 세 개씩도 묶을 수 있어야 해요. 따라서 각 소인수를 여섯 개씩 묶을 수 있도록 채워야 해요.

③ 채울 소인수의 개수 → 3, 4

2는 세 개에서 여섯 개로 맞추므로 $6-3=3$개, 3은 두 개에서 여섯 개로 맞추므로 $6-2=4$개를 채워요. 여섯 개보다 적게 맞추면 두 묶음 조건을 함께 만족하지 못해요.

④ 곱할 수 → 3, 4, 648

채울 소인수를 모두 곱하면 $2^3 \times 3^4 = 8 \times 81 = 648$이에요. 두 소인수를 각각 가능한 가장 작은 개수로 맞췄으므로 648이 가장 작아요.

⑤ 검산 → 216, 36

$72 \times 648 = 46656 = 216^2 = 36^3$이에요. 같은 결과가 자연수의 제곱이면서 세제곱인지 두 식으로 확인해요.

핵심 연결 $72 = 2^3 \times 3^2$ → 2와 3을 각각 6개로 → 더 곱할 수 $2^3 \times 3^4 = 648$ → $72 \times 648 = 216^2 = 36^3$

빈칸 구조도 심화 2 — 어떤 순서로 연결할까

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

심화 2

구할 것

같은 자연수로 둘 다 제곱수가 되는지

① 두 수를 소인수분해하면

$72 = 2^{\square} \times 3^{\square}$, $108 = 2^{\square} \times 3^{\square}$

② 따로 곱한다면

72에는 _____, 108에는 _____ 을 곱하면 제곱수

③ 소인수 2의 개수

72는 (짝수 / 홀수), 108은 (짝수 / 홀수)

④ 같은 수를 곱하면 두 수에 더해지는 2의 개수는

(같다 / 다르다)

⑤ 결론

(가능 / 불가능)

이 문제의 갈림길 같은 자연수를 곱한 뒤에도 두 결과의 소인수 2의 개수는 (둘 다 짝수가 될 수 있다 / 하나는 홀수, 하나는 짝수로 남는다).

심화 2 다시 보기 같은 곱할 수로 두 결과를 만들 수 있는지 확인하기

함께 나온 조건 두 수에 같은 자연수 · 모두 제곱수 ⇒ **떠올린 개념** 지수가 모두 짝수
→ 모자라는 소인수 채우기 → 두 수의 지수 홀짝 비교

문제 72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

풀이

$72 = 2^3 \times 3^2$, $108 = 2^2 \times 3^3$이다. 72의 소인수 2는 홀수 개이고 108의 소인수 2는 짝수 개이다. 똑같은 자연수를 곱하면 두 수에 더해지는 소인수 2의 개수가 같으므로 한쪽만 짝수 개가 된다. 따라서 두 수를 동시에 제곱수로 만들 수 없다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① 두 수를 소인수분해하면 → 3, 2, 2, 3

$72 = 2^3 \times 3^2$, $108 = 2^2 \times 3^3$이에요. 두 수에 들어 있는 2와 3의 개수를 각각 비교해요.

② 따로 곱한다면 → 2, 3

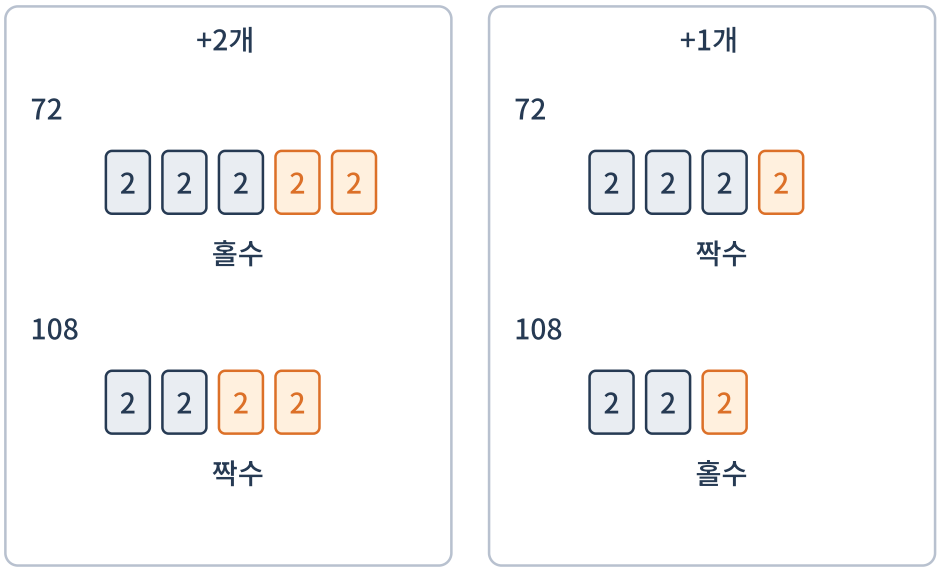
서로 다른 수를 곱해도 된다면 $72 \times 2 = 144 = 12^2$, $108 \times 3 = 324 = 18^2$으로 만들 수 있어요. 그러나 이 문제는 두 수에 같은 자연수를 곱해야 해요.

QH2 각 수를 따로 제곱수로 만들 수 있는데도 왜 같은 자연수로는 안 될까?

$72 = 2^3 \times 3^2$을 제곱수로 만들려면 곱하는 수에 2가 홀수 개 들어 있어야 해요. $108 = 2^2 \times 3^3$을 제곱수로 만들려면 곱하는 수에 2가 하나도 없거나 짝수 개 들어 있어야 해요. 같은 자연수에 들어 있는 2의 개수는 두 조건을 동시에 만족할 수 없어요.

③ 소인수 2의 개수 → 홀수, 짝수

72에는 소인수 2가 세 개로 홀수이고, 108에는 두 개로 짝수예요. 제곱수가 되려면 곱한 결과에서는 둘 다 2의 개수가 짝수여야 해요.



④ 같은 수를 곱하면 두 수에 더해지는 2의 개수는 → 같다

같은 자연수를 곱하므로 그 자연수에 들어 있는 소인수 2의 개수도 두 수에 똑같이 더해져요. 2가 없는 자연수를 곱하면 두 수 모두 2의 개수가 늘지 않아요.

⑤ 결론 → 불가능

2를 하나도 더하지 않거나 짝수 개 더하면 홀수와 짝수가 그대로이고, 홀수 개 더하면 짝수와 홀수로 바뀌어요. 어느 경우에도 둘 다 짝수가 되지 않으므로 같은 자연수로 두 결과를 모두 제곱수로 만드는 것은 불가능해요.

핵심 연결 $72 = 2^3 \times 3^2, 108 = 2^2 \times 3^3$ → 2의 지수 홀수·짝수 → 같은 수를 곱해도 홀짝 차이가 남음 → 불가능

빈칸 구조도 심화 1·2 모아 보기 — 두 문제는 어디가 같고 어디가 다를까

두 문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

두 문제 모두 72에 자연수를 곱하고, 함께 만족해야 할 조건이 두 개 있다.

	심화 1	심화 2
	72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.	72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.
① 두 조건이 걸린 곳	(한 결과에 두 조건 / 두 수에 같은 곱할 수)	(한 결과에 두 조건 / 두 수에 같은 곱할 수)
② 소인수 개수로 바꾼 조건	각 소인수가 _____ 개씩 묶여야 한다	소인수 2의 개수가 두 결과에서 모두 (짝수 / 홀수)여야 한다
③ 두 조건을 함께 만족하는 수가	(있다 / 없다)	(있다 / 없다)
④ 답	_____	(가능 / 불가능)

두 문제를 비교하면 두 조건을 함께 만족해야 할 때는 각 조건을 (따로 / 소인수 개수로 바꾸어 함께) 따져 본다.

빈칸 구조도 심화 3 — 어떤 순서로 연결할까

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ◯표 하시오.

72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

심화 3

구할 것

곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수

① 72를 소인수분해하면

$72 = 2^{\square} \times 3^{\square}$

② 세제곱수가 되는 가장 작은 곱할 수

_____

③ 다른 곱할 수를 만드는 방법

그 수에 (제곱수 / 세제곱수)를 곱한다

④ 곱할 수 후보(작은 것부터)

_____, _____, _____, _____, …

⑤ 답

_____

이 문제의 갈림길 '가장 큰 두 자리'이면 첫째 두 자리 후보에서 (멈춘다 / 세 자리가 나올 때까지 본다).

심화 3 다시 보기 두 자리 후보를 끝까지 찾아 가장 큰 수 고르기

함께 나온 조건 **곱하여 세제곱수 · 두 자리 중 가장 큰 수**

⇒ **떠올린 개념** **지수가 모두 3의 배수 → 모자라는 소인수 채우기 → 곱할 수 후보 나열 → 범위 안의 후보 전부**

문제 72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

풀이

$72 = 2^3 \times 3^2$이므로 곱할 수는 3에 세제곱수를 곱한 수이다. 작은 순서로 3, 24, 81, 192, … 이며, 이 중 두 자리 자연수는 24, 81이다. 가장 큰 수는 81이다. $72 \times 81 = 5832 = 18^3$으로 검산한다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① 72를 소인수분해하면 → 3, 2

$72 = 2^3 \times 3^2$이므로 소인수 2는 세 개, 3은 두 개예요. 세제곱수로 만들려면 같은 소인수를 세 개씩 묶을 수 있어야 해요.

② 세제곱수가 되는 가장 작은 곱할 수 → 3

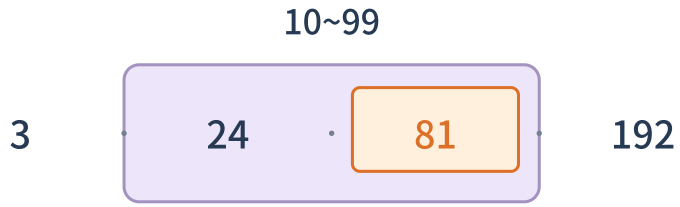
소인수 3 한 개만 더 곱하면 $72 \times 3 = 216 = 6^3$이에요. 따라서 자릿수 제한을 적용하기 전 가장 작은 곱할 수는 3이에요.

③ 다른 곱할 수를 만드는 방법 → 세제곱수

3을 곱해 세 개씩 맞춘 뒤에는 3에 어떤 세제곱수를 곱해도 돼요. 원래 없던 소인수도 세 개씩 곱할 수 있으므로, 예를 들어 $72 \times 3 \times 5^3 = 6^3 \times 5^3 = 30^3$도 세제곱수예요.

④ 곱할 수 후보(작은 것부터) → 3, 24, 81, 192

$3 \times 1^3 = 3$, $3 \times 2^3 = 24$, $3 \times 3^3 = 81$, $3 \times 4^3 = 192$로 후보를 나열해요. 두 자리 수는 24, 81이고, 192와 그 뒤의 후보는 세 자리 이상이에요.



⑤ 답 → 81

두 자리 후보 $24, 81$ 중 더 큰 81을 골라요. $72 \times 81 = 5832 = 18^3$으로 세제곱수가 되는지도 확인해요.

QH3 가장 큰 두 자리 자연수를 구할 때 왜 첫째 두 자리 후보에서 멈추면 안 될까?

첫째 두 자리 후보 24는 조건을 만족하지만 가장 크지는 않아요. 다음 후보 81도 두 자리이고, 그다음 192는 세 자리여서 81이 답이에요.

핵심 연결 $72 = 2^3 \times 3^2$ → 3 한 개 곱하면 $216 = 6^3$ → 후보 $3, 24, 81, 192, \cdots$ → 두 자리 $24, 81$ → $81, 72 \times 81 = 18^3$

빈칸 구조도 심화 4 — 어떤 순서로 연결할까

문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

> 소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

심화 4

구할 것

조건을 만족하는 가장 작은 원래 수

① 2를 곱해 세제곱수가 되려면

(2의 개수) + 1은 (2의 배수 / 3의 배수),

3의 개수는 (2의 배수 / 3의 배수)

② 3을 곱해 제곱수가 되려면

2의 개수는 (짝수 / 홀수), 3의 개수는 (짝수 / 홀수)

③ 두 조건을 함께 만족하는 가장 작은 개수

2는 _____ 개, 3은 _____ 개

④ 구하는 수

$2^{\square} \times 3^{\square} =$ _____

⑤ 검산

(구하는 수) × 2 = _____ = $____^{3}$,

(구하는 수) × 3 = _____ = $____^{2}$

이 문제의 갈림길 곱한 뒤의 조건을 (원래 수의 소인수 개수 / 곱한 결과의 크기)로 되돌려 생각한다.

심화 4 다시 보기 곱한 뒤의 조건으로 원래 수의 소인수 개수 정하기

함께 나온 조건 **곱한 뒤의 두 조건 · 원래 수** ⇒ **떠올린 개념** **곱하기 전의 지수로 되돌리기**
→ 지수가 모두 3의 배수 → 지수가 모두 짝수

문제 소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

풀이

2를 곱해 세제곱수가 되려면 원래 수의 2의 개수는 $2, 5, 8, \cdots$이고, 3의 개수는 $3, 6, 9, \cdots$여야 한다. 3을 곱해 제곱수가 되려면 원래 수의 2의 개수는 짝수, 3의 개수는 홀수여야 한다. 두 조건을 함께 만족하는 가장 작은 개수는 각각 $2, 3$이므로 $2^2 \times 3^3 = 108$이다.
$108 \times 2 = 216 = 6^3$, $108 \times 3 = 324 = 18^2$으로 확인한다.

단계별로 다시 보기 빈칸 구조도의 같은 번호 칸을 찾아 읽어요

① 2를 곱해 세제곱수가 되려면 → 3의 배수, 3의 배수

2를 곱하면 원래 수의 2의 개수에 1이 더해지므로 그 합이 3의 배수여야 해요. 따라서 원래 수의 2의 개수는 $2, 5, 8, \cdots$이고, 3의 개수는 그대로 3의 배수여야 하므로 $3, 6, 9, \cdots$예요.

② 3을 곱해 제곱수가 되려면 → 짝수, 홀수

3을 곱하면 2의 개수는 바뀌지 않으므로 원래부터 짝수여야 해요. 3의 개수는 1이 더해져 짝수가 되어야 하므로 원래는 홀수여야 해요.

③ 두 조건을 함께 만족하는 가장 작은 개수 → 2, 3

2의 개수는 2, 5, 8, … 중 짝수인 가장 작은 2를 골라요. 3의 개수는 3, 6, 9, … 중 홀수인 가장 작은 3을 골라요.

2의 개수

후보	2	5	8 …
짝수	○	×	○
최소	2		

3의 개수

후보	3	6	9 …
홀수	○	×	○
최소	3		

$$2^2 \times 3^3 = 108$$

QH4 2를 곱할 때는 2의 개수만, 3을 곱할 때는 3의 개수만 확인해도 될까?

아니요. 2를 곱해도 3의 개수는 그대로이므로 세제곱수가 되려면 3의 개수도 3의 배수여야 하고, 3을 곱해도 2의 개수는 그대로이므로 제곱수가 되려면 2의 개수가 짝수여야 해요. 따라서 각 조건에서 두 소인수의 개수를 모두 확인해야 해요.

④ 구하는 수 → 2, 3, 108

두 소인수의 개수를 각각 가장 작게 정했으므로 구하는 수는 $2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$이에요. 2나 3의 개수를 더 늘리면 수가 커져요.

⑤ 검산 → 216, 6, 324, 18

$108 \times 2 = 216 = 6^3$, $108 \times 3 = 324 = 18^2$이에요. 원래 수 108이 두 곱셈 조건을 모두 만족하는지 확인해요.

핵심 연결

원래 수 $2^{\square} \times 3^{\square}$ → 2의 개수 2, 5, 8, …, 3의 개수 3, 6, 9, …
→ 2의 개수는 짝수, 3의 개수는 홀수 → 가장 작은 개수 2, 3
→ $2^2 \times 3^3 = 108$

빈칸 구조도 심화 3·4 모아 보기 — 두 문제는 어디가 같고 어디가 다를까

두 문제를 푼 과정을 떠올리며 빈칸을 채우시오. ( ) 안에서는 알맞은 것에 ○표 하시오.

두 문제 모두 세제곱수가 되는 조건이 있고, 답을 하나로 고르는 조건이 따로 있다.

심화 3	심화 4
72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.	소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.
① 구하는 것	
(곱할 수 / 원래 수)	(곱할 수 / 원래 수)
▼	▼
② 후보를 찾는 방법	
(후보를 늘어놓는다 / 소인수 개수를 정한다)	(후보를 늘어놓는다 / 소인수 개수를 정한다)
▼	▼
③ 답을 하나로 고른 조건	
(두 자리 중 가장 큰 것 / 가장 작은 것)	(두 자리 중 가장 큰 것 / 가장 작은 것)
▼	▼
④ 답	
_____	_____

두 문제를 비교하면 구하는 것이 곱할 수인지 원래 수인지를 (먼저 / 나중에) 확인해야 후보를 바르게 만든다.

3 전체 조건 개념 지도

도구 1 지수를 6의 배수로

무엇을 확인할까? 한 결과가 제곱수이면서 세제곱수여야 하나요?

$$72 \times 648 = 2^6 \times 3^6 = 216^2 = 36^3$$

한 결과가 제곱수이면서 세제곱수여야 하면 각 소인수의 개수를 2와 3의 공배수인 6개, 12개, 18개, …로 맞춰요. $72 = 2^3 \times 3^2$에서는 2를 세 개, 3을 네 개 더 곱하면 두 소인수가 각각 여섯 개가 돼요.

주의 두 조건을 따로 만족하는 수를 찾는 것이 아니라 한 결과가 두 조건을 모두 만족해야 해요. 나눗셈에서 어떤 소인수가 모두 없어져 0개가 되어도 괜찮아요. $1 = 1^2 = 1^3$도 두 조건을 만족해요.

도구 2 같은 수를 곱하면 홀짝 차이가 남는다

무엇을 확인할까? 두 수에 같은 자연수를 곱해 두 결과를 모두 제곱수로 만들 수 있나요?

같은 수를 곱하면 두 수의 지수가 똑같이 늘어난다	
$72 = 2^3 \times 3^2$	$108 = 2^2 \times 3^3$
2의 지수 3 — 홀수	2의 지수 2 — 짝수
3의 지수 2 — 짝수	3의 지수 3 — 홀수

두 수에 같은 자연수를 곱하면 소인수별로 더해지는 개수가 같아요. 72와 108처럼 2의 개수가 홀수·짝수로 다르면, 같은 수를 곱한 뒤에도 하나는 홀수, 하나는 짝수로 남아요. 따라서 두 결과를 모두 제곱수로 만들 수 없어요.

주의 한쪽에 없는 소인수는 0개로 보고 짝수로 세어요. 모든 소인수의 지수 홀짝이 두 수에서 같다면, 홀수 개 있는 소인수를 한 개씩 곱해 두 결과를 모두 제곱수로 만들 수 있어요.

도구 3 곱하기 전의 지수로 되돌리기

무엇을 확인할까? 구하려는 것은 곱할 수인가요, 곱하기 전의 원래 수인가요?

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

2를 곱하면	3을 곱하면
$108 \times 2 = 2^3 \times 3^3 = 6^3$	$108 \times 3 = 2^2 \times 3^4 = 18^2$
2의 지수만 1 늘고, 3의 지수는 그대로	3의 지수만 1 늘고, 2의 지수는 그대로

곱하기 전의 수를 구할 때는 각 곱셈이 소인수의 지수를 어떻게 바꾸는지 되돌려 보고, 원래 지수가 두 조건을 함께 만족하게 정해요. 2를 곱하면 2의 개수만 한 개 늘고 3의 개수는 바뀌지 않으며, 3을 곱하면 3의 개수만 한 개 늘고 2의 개수는 바뀌지 않아요.

주의 조건마다 모든 소인수의 지수를 확인해요. 2를 곱할 때 2의 개수만 보거나, 3을 곱할 때 3의 개수만 보면 다른 소인수의 조건을 빠뜨릴 수 있어요.

전체 조건 개념 지도

소인수분해한 뒤

무엇을 묻는가? 함께 나온 조건은 무엇인가?

1 $2^4 \times 3^2 = 12^2$, $2^3 \times 3^3 = 6^3$

함께 나온 조건 제곱수 / 세제곱수가 되게 한다

→ **지수가 모두 짝수 / 지수가 모두 3의 배수**

1보다 큰 자연수를 소인수분해했을 때 지수가 모두 짝수이면 제곱수, 모두 3의 배수이면 세제곱수이다

심화 2 | 심화 3 | 심화 4

2 $24 \times 9 = 6^3$, $24 \div 3 = 2^3$

함께 나온 조건 곱한다 / 나눈다

→ **모자라는 소인수 채우기 / 남는 소인수 덜어 내기**

가장 작은 수는 곱할 때 모자라는 소인수만 곱하고, 나눌 때 남는 소인수만 나눈다. 나누는 수는 원래 수의 약수이고, 몫이 1이어도 $1 = 1^2 = 1^3$이다

심화 1 | 심화 2 | 심화 3

3 3×1^2, 3×2^2, 3×3^2, …

함께 나온 조건 곱할 수의 개수·범위를 묻는다(가장 작은 하나, 두 자리, 30 이하 모두)

→ **곱할 수 후보 나열 → 조건에 맞는 첫째 후보 / 범위 안의 후보 전부**

후보는 가장 작은 곱할 수에 제곱수(세제곱수를 만들 때는 세제곱수)를 곱한 수이다. 가장 작은 수를 물으면 조건에 맞는 첫째 후보에서 멈추고, 모두나 가장 큰 수를 물으면 범위를 넘는 후보가 나올 때까지 본다

심화 3

4 $2^6 \times 3^6 = 216^2 = 36^3$

함께 나온 조건 한 결과가 제곱수이면서 세제곱수

→ **지수를 모두 6의 배수로**

같은 소인수를 두 개씩도 세 개씩도 남김없이 묶으려면 지수가 2와 3의 공배수 6, 12, 18, …이어야 한다

심화 1

5 $72 = 2^3 \times 3^2$, $108 = 2^2 \times 3^3$

함께 나온 조건 두 수에 같은 자연수를 곱한다

→ **두 수의 지수 홀짝 비교**

같은 자연수를 곱하면 두 수의 같은 소인수 지수가 똑같이 늘어난다. 지수의 홀짝이 다른 소인수가 있으면 두 결과를 함께 제곱수로 만들 수 없다

심화 2

6 $108 \times 2 = 6^3$, $108 \times 3 = 18^2$

함께 나온 조건 곱한 뒤의 조건으로 원래 수를 묻는다

→ **곱하기 전의 지수로 되돌리기**

2를 곱하면 2의 지수만, 3을 곱하면 3의 지수만 1 늘어난다. 조건마다 모든 소인수의 지수를 확인해 함께 만족하는 가장 작은 지수를 고른다

심화 4

4 바꿔 풀기

바꿔 풀기 1 원래 문제와 맞대어 풀기

원래 문제 · 심화 1

72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

▼ 바꾼 문제

바꿔 풀기 1 576을 어떤 자연수로 나누어, 몫이 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 나눌 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

풀이를 쓰는 칸

바꿔 풀기 2 원래 문제와 맞대어 풀기

원래 문제 · 심화 2

72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

▼ 바꾼 문제

바꿔 풀기 2 72와 200에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

풀이를 쓰는 칸

5 막혔을 때 다시 연결하기

심화 1 다시 연결하기

문제 72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

막힌 곳

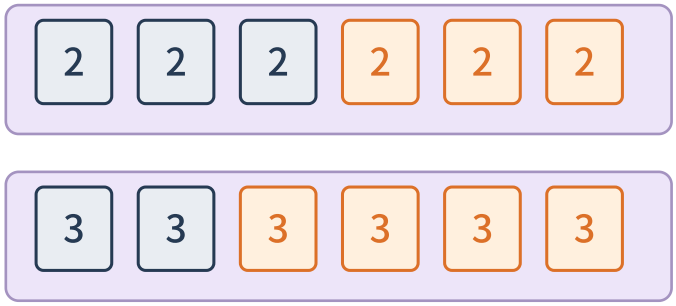
처음에는 제곱수만 되는 가장 작은 곱할 수를 구하고 멈추었다.

▼

새로 연결한 뒤

72를 소인수분해한 뒤 제곱수 조건과 세제곱수 조건을 동시에 만족하도록 소인수를 여섯 개씩 묶는 것을 연결한다.

72 6개씩



$2^3 \times 3^4 = 648$

까닭 두 개씩도 세 개씩도 남김없이 묶이려면 소인수의 개수가 2와 3의 공배수여야 하기 때문이다. $72 = 2^3 \times 3^2$에 $2^3 \times 3^4 = 648$을 곱하면 $46656 = 216^2 = 36^3$이 된다.

$$72 \times 648 = 2^6 \times 3^6 = 216^2 = 36^3$$

심화 2 다시 연결하기

문제 72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

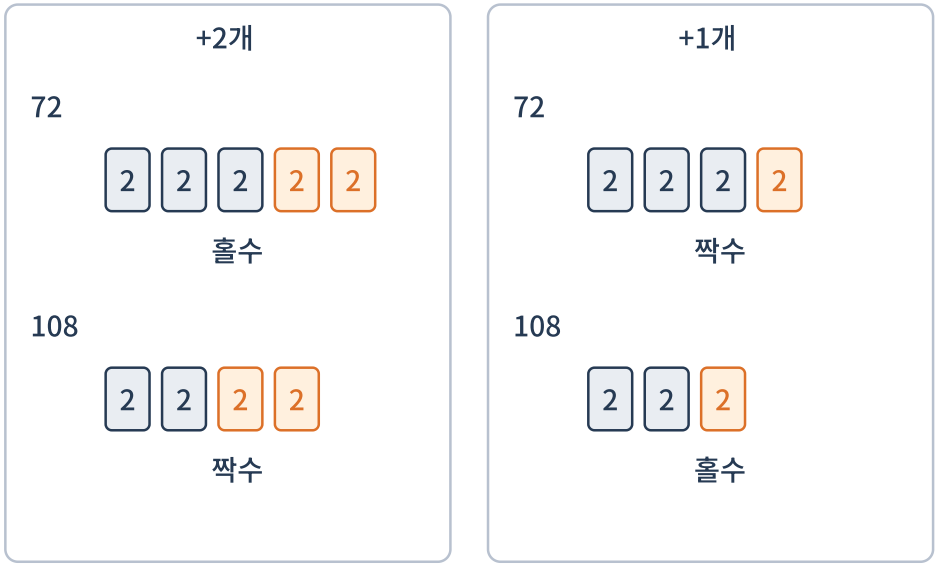
막힌 곳

각각의 수에 다른 자연수를 곱할 때의 답만 구했다.

▼

새로 연결한 뒤

72와 108에 같은 자연수를 곱해야 한다는 조건을 다시 연결한다.



까닭 72에는 소인수 2가 홀수 개, 108에는 짝수 개이므로 같은 수를 곱해 두 결과의 2의 개수를 모두 짝수로 만들 수 없다.

같은 수를 곱하면 2의 개수가 두 수에 똑같이 늘어나 홀수·짝수의 차이가 남는다

심화 3 다시 연결하기

문제 72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

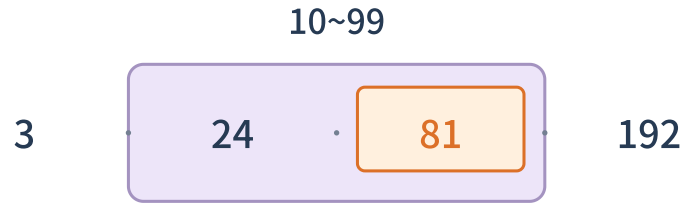
막힌 곳

첫째 두 자리 후보를 찾고 멈추었다.

▼

새로 연결한 뒤

문제가 가장 큰 두 자리 수를 요구하므로 후보를 계속 찾아 비교한다.



까닭 세제곱수가 되게 하는 곱할 수 $3, 24, 81, 192, \cdots$에서 두 자리 수는 $24, 81$이므로 답은 81이다.

$$3 \times 1^3,\ 3 \times 2^3,\ 3 \times 3^3,\ 3 \times 4^3 = 3,\ 24,\ 81,\ 192$$

심화 4 다시 연결하기

문제 소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

막힌 곳

2를 곱해 세제곱수가 되는 조건으로 2의 개수를 $2, 5, 8, \cdots$ 중에서 고르다가, 3을 곱해 제곱수가 되는 조건은 함께 확인하지 않았다.

▼

새로 연결한 뒤

3을 곱했을 때 제곱수가 되는 조건도 원래 수의 소인수 개수에 함께 적용한다.

2의 개수

후보	2	5	8	…
짝수	○	×	○	
최소	2			

3의 개수

후보	3	6	9	…
홀수	○	×	○	
최소	3			

$$2^2 \times 3^3 = 108$$

까닭 3을 곱해도 2의 개수는 바뀌지 않으므로 $2, 5, 8, \cdots$ 중 짝수인 가장 작은 2를 골라야 한다. 3의 개수도 세제곱수 조건의 $3, 6, 9, \cdots$와 제곱수 조건의 홀수를 함께 만족하는 가장 작은 3을 고른다. 따라서 $2^2 \times 3^3 = 108$이고, $108 \times 2 = 216 = 6^3$, $108 \times 3 = 324 = 18^2$으로 확인한다.

$108 \times 2 = 216 = 6^3$, $108 \times 3 = 324 = 18^2$

6 마무리 복습

문제 ↔ 개념 한눈에 보기

문제	심화 1	심화 2	심화 3	심화 4	바꿔 풀기 1	바꿔 풀기 2
함께 나온 조건	한 결과가 제곱수이면서 세제곱수	두 수에 같은 자연수 · 모두 제곱수	곱하여 세제곱수 · 두 자리 중 가장 큰 수	곱한 뒤의 두 조건 · 원래 수	나누어 · 몫이 제곱수이면서 세제곱수	두 수에 같은 자연수 · 모두 제곱수
지수가 모두 짝수		①		③		①
지수가 모두 3의 배수			①	②		
모자라는 소인수 채우기	②	②	②			③
남는 소인수 덜어 내기					②	
곱할 수 후보 나열			③			
범위 안의 후보 전부			④			
지수를 모두 6의 배수로	①				①	
두 수의 지수 홀짝 비교		③				②
곱하기 전의 지수로 되돌리기				①		

원 안의 숫자는 그 문제에서 개념을 쓴 순서다.

모든 문항에서 먼저 소인수분해를 해요.

조건 채우기 12문항

보기 | 짝수 | 홀수 | 3의 배수 | 한 개 | 세 개 | 여섯 개 | 채운다 | 덜어 낸다 | 넣는다 | 넣지 않는다 | 제곱수 | 세제곱수 | 멈춘다 | 멈추지 않는다 | 같다 | 다르다 | 있다 | 없다 | 원래 수 | 곱한 결과

다음 빈칸에 [보기]의 낱말을 알맞게 쓰시오. 같은 낱말을 여러 번 써도 된다.

1. 같은 소인수를 두 개씩 남김없이 묶을 수 있으면 지수가 _____ 이고, 세 개씩 남김없이 묶을 수 있으면 지수가 _____ 이다.

2. $72 \times 81 = 2^3 \times 3^6$에서 지수 3과 6은 모두 _____ 이므로 곱한 결과는 세제곱수이다.

3. 세 개씩 묶이지 않는 소인수의 개수를 바꾸려고 한다. 곱셈으로 세제곱수를 만들 때는 그 소인수를 _____. 나눗셈으로 세제곱수인 몫을 만들 때는 그 소인수를 _____.

4. 100을 어떤 자연수로 나누어 몫이 제곱수가 되게 하는 수를 모두 구한다. $100 \div 100 = 1$이고 $1 = 1^2$이므로, 100으로 나누는 경우는 답에 _____.

5. 곱한 결과를 같은 자연수를 세 번 곱한 꼴로 나타내려고 한다. 다른 가능한 곱할 수는 가장 작은 곱할 수에 1보다 큰 _____ 를 곱해서 만든다.

6. 72에 곱해 세제곱수가 되는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구한다. 첫째 두 자리 후보 24를 찾았을 때, 후보 찾기를 _____.

7. 한 결과가 제곱수인 동시에 세제곱수여야 한다. 두 개씩도 세 개씩도 나눠 묶을 수 있는 가장 작은 한 묶음에는 같은 소인수가 _____ 들어간다.

8. 한 결과가 제곱수이면서 세제곱수가 되게 곱할 때, 소인수 2가 세 개 있으면 2를 가장 적게 _____ 더 곱한다.

9. 서로 다른 두 수에 똑같은 자연수를 곱한다. 각 곱셈에서 새로 곱해지는 소인수 2의 개수를 비교하면 _____.

10. $72 = 2^3 \times 3^2$과 $288 = 2^5 \times 3^2$처럼 같은 소인수의 지수의 홀짝이 모두 같으면, 같은 자연수를 곱해 두 결과를 함께 제곱수로 만들 수 _____.

11. 어떤 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다고 한다. 그 어떤 수를 구하려면 두 조건을 _____ 의 지수에 관한 조건으로 되돌린다.

12. 소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 수에 3을 곱하면 제곱수가 된다. 원래 수를 아직 모르더라도, 곱하기 전 그 수의 소인수 2의 지수는 반드시 _____ 라고 판단할 수 있다.

정리 문항 1

(가)

200에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

(나)

소인수가 2와 5뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 제곱수가 되고, 5를 곱하면 세제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

(1) 각 문제의 답과 검산식을 쓰시오.

(2) 두 문제에서 구하는 것(곱할 수 / 원래 수)에 따라 소인수의 지수 조건을 어떻게 세웠는지 차이를 설명하시오.

	(가)	(나)
답		
검산식		
구하는 것		
지수 조건을 세운 방법		

두 문제를 비교하면

7 정답과 해설

빠른 정답

심화	정답	바꿔 풀기	정답
1	648	**1**	9
2	불가능	**2**	할 수 있다, 2
3	81		
4	108		

빈칸 구조도 정답

빈칸 구조도 정답 **심화 1**

심화 1 **한 결과가 제곱수이면서 세제곱수 ⇒ 떠올린 개념 지수를 모두 6의 배수로**
→ 모자라는 소인수 채우기

72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다.
곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

심화 1

구할 것
곱할 수 있는 가장 작은 자연수

① 72를 소인수분해하면

$72 = 2^{\boxed{3}} \times 3^{\boxed{2}}$

② 제곱수이면서 세제곱수가 되려면

같은 소인수를 **6** 개씩 묶을 수 있어야 한다

③ 채울 소인수의 개수

소인수 2를 **3** 개, 3을 **4** 개

④ 곱할 수

$2^{\boxed{3}} \times 3^{\boxed{4}} =$ **648**

⑤ 검산

$72 \times 648 = 46656 =$ **216** $^2 =$ **36** ^{3}

이 문제의 갈림길 두 조건을 함께 만족하려면 (세 개씩 / **여섯 개씩**) 묶이게 해야 한다.

빈칸 구조도 정답 심화 2

심화 2 두 수에 같은 자연수 · 모두 제곱수 ⇒ 떠올린 개념 지수가 모두 짝수
→ 모자라는 소인수 채우기 → 두 수의 지수 홀짝 비교

72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

심화 2

구할 것
같은 자연수로 둘 다 제곱수가 되는지

① 두 수를 소인수분해하면

$72 = 2^{3} \times 3^{2}$, $108 = 2^{2} \times 3^{3}$

② 따로 곱한다면

72에는 **2** , 108에는 **3** 을 곱하면 제곱수

③ 소인수 2의 개수

72는 (짝수 / **홀수**), 108은 (**짝수** / 홀수)

④ 같은 수를 곱하면 두 수에 더해지는 2의 개수는

(**같다** / 다르다)

⑤ 결론

(가능 / **불가능**)

이 문제의 갈림길 같은 자연수를 곱한 뒤에도 두 결과의 소인수 2의 개수는 (둘 다 짝수가 될 수 있다 / **하나는 홀수, 하나는 짝수로 남는다**).

빈칸 구조도 정답 심화 1·2 모아 보기

두 문제 모두 72에 자연수를 곱하고, 함께 만족해야 할 조건이 두 개 있다.

심화 1

72에 어떤 자연수를 곱하여, 곱한 결과가 제곱수이면서 동시에 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하시오.

① 두 조건이 걸린 곳

(**한 결과에 두 조건** / 두 수에 같은 곱할 수)

② 소인수 개수로 바꾼 조건

각 소인수가 **6** 개씩 묶여야 한다

③ 두 조건을 함께 만족하는 수가

(**있다** / 없다)

④ 답

648

심화 2

72와 108에 같은 자연수를 각각 곱하여 두 결과가 모두 제곱수가 되게 할 수 있는지 판단하시오. 할 수 있으면 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하고, 할 수 없으면 그 까닭을 쓰시오.

① 두 조건이 걸린 곳

(한 결과에 두 조건 / **두 수에 같은 곱할 수**)

② 소인수 개수로 바꾼 조건

소인수 2의 개수가 두 결과에서 모두 (**짝수** / 홀수)여야 한다

③ 두 조건을 함께 만족하는 수가

(있다 / **없다**)

④ 답

(가능 / **불가능**)

두 문제를 비교하면 두 조건을 함께 만족해야 할 때는 각 조건을 (따로 / **소인수 개수로 바꾸어 함께**) 따져 본다.

비교 정리

심화 1은 72에 자연수를 곱한 한 결과가 제곱수이면서 세제곱수여야 해요. 각 소인수를 여섯 개씩 맞추면 두 조건이 함께 성립하여 648을 곱하면 돼요. 심화 2는 $72 = 2^3 \times 3^2$, $108 = 2^2 \times 3^3$에 같은 자연수를 곱해야 하므로 2의 개수가 두 수에 똑같이 늘어요. 홀수와 짝수의 차이가 끝까지 남으므로 두 결과를 모두 제곱수로 만드는 것은 불가능해요.

빈칸 구조도 정답 심화 3

심화 3 곱하여 세제곱수 · 두 자리 중 가장 큰 수 ⇒ 떠올린 개념 지수가 모두 3의 배수
→ 모자라는 소인수 채우기 → 곱할 수 후보 나열 → 범위 안의 후보 전부

72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

심화 3

구할 것
곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수

① 72를 소인수분해하면

$72 = 2^{3} \times 3^{2}$

② 세제곱수가 되는 가장 작은 곱할 수

3

③ 다른 곱할 수를 만드는 방법

그 수에 (제곱수 / **세제곱수**)를 곱한다

④ 곱할 수 후보(작은 것부터)

3 , 24 , 81 , 192 , …

⑤ 답

81

이 문제의 갈림길 '가장 큰 두 자리'이면 첫째 두 자리 후보에서 (멈춘다 / **세 자리가 나올 때까지 본다**).

심화 4 곱한 뒤의 두 조건 · 원래 수 ⇒ 떠올린 개념 곱하기 전의 지수로 되돌리기
→ 지수가 모두 3의 배수 → 지수가 모두 짝수

소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

심화 4

구할 것
조건을 만족하는 가장 작은 원래 수

① 2를 곱해 세제곱수가 되려면

(2의 개수) + 1은 (2의 배수 / **3의 배수**),
3의 개수는 (2의 배수 / **3의 배수**)

② 3을 곱해 제곱수가 되려면

2의 개수는 (**짝수** / 홀수), 3의 개수는 (짝수 / **홀수**)

③ 두 조건을 함께 만족하는 가장 작은 개수

2는 **2** 개, 3은 **3** 개

④ 구하는 수

$2^{\boxed{2}} \times 3^{\boxed{3}} =$ **108**

⑤ 검산

$108 \times 2 =$ **216** $=$ **6^{3}**,
$108 \times 3 =$ **324** $=$ **18^{2}**

이 문제의 갈림길 곱한 뒤의 조건을 (**원래 수의 소인수 개수** / 곱한 결과의 크기)로 되돌려 생각한다.

빈칸 구조도 정답 심화 3·4 모아 보기

두 문제 모두 세제곱수가 되는 조건이 있고, 답을 하나로 고르는 조건이 따로 있다.

심화 3

72에 두 자리 자연수를 곱하여 세제곱수가 되게 하려고 한다. 곱할 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하시오.

① 구하는 것

(**곱할 수** / 원래 수)

② 후보를 찾는 방법

(**후보를 늘어놓는다** / 소인수 개수를 정한다)

③ 답을 하나로 고른 조건

(**두 자리 중 가장 큰 것** / 가장 작은 것)

④ 답

81

심화 4

소인수가 2와 3뿐이고 두 소인수를 모두 포함하는 어떤 자연수가 있다. 이 수에 2를 곱하면 세제곱수가 되고, 3을 곱하면 제곱수가 된다. 조건을 만족하는 가장 작은 자연수를 구하시오.

① 구하는 것

(곱할 수 / **원래 수**)

② 후보를 찾는 방법

(후보를 늘어놓는다 / **소인수 개수를 정한다**)

③ 답을 하나로 고른 조건

(두 자리 중 가장 큰 것 / **가장 작은 것**)

④ 답

108

두 문제를 비교하면 구하는 것이 곱할 수인지 원래 수인지를 (**먼저** / 나중에) 확인해야 후보를 바르게 만든다.

비교 정리

심화 3은 72에 곱할 두 자리 자연수 중 가장 큰 것을 구하므로, 곱할 수 후보 3, 24, 81, 192, …를 늘어놓아 81을 골라요. 심화 4는 2를 곱하면 세제곱수, 3을 곱하면 제곱수가 되는 원래 수를 구하므로 원래 수의 2와 3의 개수를 정해요. 두 소인수를 모두 포함하고 다른 소인수는 없다는 조건까지 적용하면 가장 작은 수는 $2^2 \times 3^3 = 108$이에요. 구하는 것이 곱할 수인지 원래 수인지에 따라 첫 행동이 달라져요.

생각 질문 답 예시와 인정 기준

생각 질문 1

(1) 답 예시: 심화 1은 72를 소인수분해하여 $72 = 2^3 \times 3^2$을 얻는다. 심화 2는 72와 108을 소인수분해하여 $72 = 2^3 \times 3^2$, $108 = 2^2 \times 3^3$을 얻는다.

(2) 답 예시: $72 \times 648 = 46656 = 216^2 = 36^3$이다. $72 = 2^3 \times 3^2$은 곱하는 수에 2가 홀수 개 있어야 제곱수가 되고, $108 = 2^2 \times 3^3$은 2가 하나도 없거나 짝수 개 있어야 제곱수가 된다. 같은 자연수 하나에 든 2의 개수는 이 두 조건을 함께 만족할 수 없으므로 불가능하다.

인정 기준: (1) 각 문제의 소인수분해를 쓰고, (2) 46656을 216의 제곱·36의 세제곱으로 나타내며 72·108의 식에서 소인수 2의 개수 조건이 어긋남을 설명하면 인정.

생각 질문 2

(1) 답 예시: 심화 3은 곱할 두 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구한다. 곱할 수 후보 3, 24, 81, 192, … 중 두 자리인 24, 81을 비교하여 81을 고른다. 심화 4는 원래 자연수 중 가장 작은 수를 구한다. 2의 개수는 2, 5, 8, … 중 짝수인 2, 3의 개수는 3, 6, 9, … 중 홀수인 3을 골라 108을 만든다.

(2) 답 예시: $72 \times 81 = 5832 = 18^3$으로 세제곱수가 됨을 확인한다. $108 \times 2 = 216 = 6^3$, $108 \times 3 = 324 = 18^2$으로 원래 수가 두 조건을 모두 만족함을 확인한다. 후보를 고르는 과정의 오류나 두 조건 중 하나를 빠뜨린 일이 없는지 확인하는 검사이다.

인정 기준: 두 문제의 답과 실제 검산식을 쓰면 인정.

바꿔 풀기 해설

바꿔 풀기 1 — 답 9

$576 = 2^6 \times 3^2$이다. 몫이 제곱수이면서 세제곱수이려면, 몫에 남는 각 소인수의 지수는 6의 배수여야 한다. 나누는 것이므로 몫의 지수는 원래 지수 이하이다. 따라서 2는 6개 또는 0개, 3은 0개를 남길 수 있다.

3 두 개는 반드시 덜어 내야 하므로 나눌 수에는 $3^2 = 9$가 포함되어야 한다. 2 여섯 개는 남겨도 조건에 맞으므로 가장 작은 나눌 수는 9이다. $576 \div 9 = 64 = 8^2 = 4^3$으로 검산한다. 2도 모두 덜어 내려고 576으로 나누면 몫이 $1 = 1^2 = 1^3$이 되어 조건에는 맞지만, 나누는 수가 9보다 크다.

바꿔 풀기 2 — 답: 할 수 있다, 2

$72 = 2^3 \times 3^2$, $200 = 2^3 \times 5^2$이다. 두 결과가 모두 제곱수이려면 각각의 소인수 지수가 모두 짝수여야 한다. 두 수 모두 2의 지수가 홀수이므로 2를 곱해 개수를 바꾸어야 한다.

같은 자연수를 곱하기 전에 모든 소인수의 지수 홀짝을 비교한다. 2의 지수는 두 수에서 모두 홀수이다. 3은 72에 두 개, 200에 0개로 모두 짝수이고, 5는 72에 0개, 200에 두 개로 모두 짝수이다. 없는 소인수는 0개로 세므로 두 수의 모든 소인수에서 홀짝이 같다.

2 한 개만 더 곱하면 두 수 모두 모든 소인수의 지수가 짝수가 된다. $72 \times 2 = 144 = 12^2$, $200 \times 2 = 400 = 20^2$이다. 1을 곱해서는 두 수 모두 제곱수가 되지 않으므로 가장 작은 곱할 수는 2이다.

조건 채우기 정답

1. 짝수, 3의 배수 **2.** 3의 배수 **3.** 채운다, 덜어 낸다

4. 넣는다 **5.** 세제곱수 **6.** 멈추지 않는다

7. 여섯 개 **8.** 세 개 **9.** 같다

10. 있다 **11.** 원래 수 **12.** 짝수

정리 문항 답 예시

(1) (가) $200 = 2^3 \times 5^2$이다. 곱한 결과가 제곱수이면서 세제곱수이려면 2와 5의 지수가 모두 6의 배수여야 한다. 각각 가장 작은 6으로 맞추려면 2는 세 개, 5는 네 개를 더 곱한다. 따라서 곱할 수는 $2^3 \times 5^4 = 8 \times 625 = 5000$이다. $200 \times 5000 = 1000000 = 1000^2 = 100^3$으로 검산한다.

(1) (나) 2를 곱해 제곱수가 되려면 원래 수의 2의 지수는 홀수, 5의 지수는 짝수여야 한다. 5를 곱해 세제곱수가 되려면 원래 수의 2의 지수는 3의 배수이고, 5의 지수에 1을 더한 수는 3의 배수여야 한다. 두 소인수를 모두 포함하므로 지수는 각각 1 이상이다. 2의 지수는 홀수이면서 3의 배수인 가장 작은 3, 5의 지수는 짝수이면서 1을 더하면 3의 배수가 되는 가장 작은 2이다. 따라서 원래 수는 $2^3 \times 5^2 = 200$이고, $200 \times 2 = 400 = 20^2$, $200 \times 5 = 1000 = 10^3$으로 검산한다.

(2) (가)는 주어진 200에 곱할 수를 구하므로, 곱한 결과의 지수를 6의 배수로 맞추기 위해 모자라는 개수를 구한다. (나)는 곱하기 전의 원래 수를 구하므로, 2를 곱했을 때와 5를 곱했을 때의 조건을 각각 원래 수의 지수 조건으로 되돌린다. 그런 다음 두 조건을 함께 만족하는 가장 작은 지수를 정한다.

인정 기준: (1) (가)의 5000과 $200 \times 5000 = 1000^2 = 100^3$, (나)의 200과 $200 \times 2 = 20^2$, $200 \times 5 = 10^3$을 쓰고, (2) 곱할 수의 모자라는 소인수 개수를 구하는 것과 원래 수의 지수를 두 조건으로 정하는 것의 차이를 설명하면 인정한다. 지수 대신 같은 소인수의 개수로 설명해도 같은 뜻이면 인정한다.